

平管內液態金屬擾流狀態熱傳遞 之灰色動態預測模型

張福平 江可達

摘 要

本文以灰色系統理論中之灰色動態預測模型，來處理平管內液態金屬擾流狀態熱傳遞之實驗數據結果，並建立數值預測模式及經驗關係式。有關液態金屬於擾流時熱傳遞問題之處理上，可視為一個灰色系統，因為不易獲得其分析解，而必須透過實驗方法以獲得相關數據，且對信息的掌握並不完全。經由實證過程與相關經驗關係式比較，發現本文所使用之數值預測模式的預測值，其誤差率相當低，極適合用於獲得極少且有限數據問題之解析，並可獲得良好結果。

關鍵字：液態金屬、擾流狀態、熱傳遞、經驗關係式、灰色動態模型。

一、前 言

平管內擾流狀態熱傳遞問題上，廣泛地使用液態金屬為工作介質，其主要考量是此介質具有較高的熱傳遞速率。其較高的熱傳遞速率比其他流體介質的導熱性高，因此極適於需要從相當小的空間移走大量熱能之狀況。此外，在高溫狀況下控制其不易被蒸發為氣態之特性，仍然可保持液體狀態，而不像水或有機冷媒等傳統流體容易蒸發為氣態。此特點非常有助於設計出更精密的熱交換器。但其腐蝕性及液態金屬與水或空氣接觸時會發生劇烈化學反應之缺點等，皆很難加以控制，幸近年來因控制技術之改善而獲得相當進步[1]。

在液態金屬擾流狀態熱傳遞問題[2-7]之處理上，因有不確定因素及非線性項關係等不易獲得分析解，而必須透過實驗方法以取得相關數據。依據其實驗數據之資料，用以建立經驗關係公式或圖表來表示，並能增大應用範圍。但是要將取得所有工作介質於不同情況下之實驗數據，以建立經驗關係公式表示是件不容易的工作。因為這些數據大部份都不規則且呈現非線性關係，因此對此數據的蒐集及整理是一項十分複雜、費時又費人力的工作。因此對這種擾流熱傳遞之問題，無法清楚分析其物理模式。一般處理方法，依據相似的物理模式之分析解函數形式，或者從因式分析(dimensional analysis)或數值階數(order of magnitude)，來推導其實驗數據的分析解函數形式之經驗關係公式。這類經驗關係公式大致由紐賽爾數(Nusselt number)、雷諾數(Reynolds number)或普朗特數(Prandtl number)等物理參數組成之指數形式。此種相似性(similarity)的觀念，Schlichting[8], Kline[9], 等將其應用在平管內邊界層熱傳遞問題上。

在液態金屬的擾流熱傳遞問題之處理上，因不易獲得分析解，而必須透過實驗方法以獲得相關數據，其信息的掌握並不完全，所以可視為一個灰色系統(Grey system)。所謂灰色系統理論是由控制理論專家鄧聚龍[10-14]所提出，在僅有部份已知信息狀態下處理系統問題的思考和解決方法。而灰色系統係指其系統內部信息不完全或關係不明確時，而無法具體描述，設所呈現給人類的顏色是灰色的而稱之。相對地，當系統內部信息完全或關係明確時，

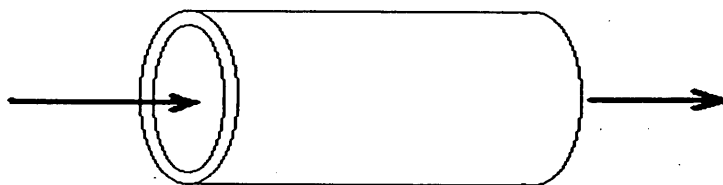
此時稱之白色系統，所呈現給人類的顏色是白色的。在現實世界中存在許多抽象的灰色系統，諸如社會系統、生態系統、經濟系統、農業系統、工業系統、交通系統、能源系統及人體生理系統等，皆可視為是一灰色系統。灰色系統理論強調系統在信息貧乏狀態下去挖掘系統的本質，用來補充系統的信息使得系統的灰色狀態轉向白色系統[15,16]。由此理論發展出的灰色關聯模式、灰色信息關係、灰色模型及灰色過程等方法，廣泛地應用在系統分析、預測、控制、評估與決策等方面。

本文探討液態金屬在擾流狀態下流經平滑圓管內之熱傳遞問題，透過已知實驗數據[7]藉由灰色系統理論中之灰色動態預測模型(Grey Dynamic Model, GDM)，來推導其以實驗數據的分析解函數形式之經驗關係公式。本文所開發灰色系統理論中灰色動態模型，來處理液態金屬擾流狀態熱傳遞之問題，藉由實驗或複雜的計算而所獲得有關問題的解答數據，尋找其規律性並建立數值預測模式，獲得其函數形式與其它的預測值。所得數值之預測模式將與其它學者[2-6]經驗關係公式作一比較，判斷其函數形式的準確率與對其它預測值的誤差率程度。

二、物理模式

液態金屬在擾流下流經平滑圓管內之物理模式，如圖一。因不易獲得分析解，而必須透過實驗方法以取得相關數據，即在不同溫度狀態與不同管徑下，來實驗量測在擾流時的熱傳遞速率。

液態金屬、擾流狀態



均勻壁溫、平滑圓管

圖一：物理模式

又依據相似的物理模式之分析解函數形式，或者從因式分析(dimensional analysis)或數值階數(order of magnitude)，來推導其實驗數據的分析解函數形式之經驗關係公式。依據過去學者之經驗，我們可以預期其經驗關係公式的函數形式為

$$Nu = C Re^a Pr^b \quad (1)$$

式中有三個物理參數分別為賽爾數(Nusselt number) Nu 、雷諾數(Reynolds number) Re 或普朗特數(Prandtl number) Pr 。因為熱傳遞速率與流場的雷諾數有關，而動量與能量的相對擴散率與普朗特數有關。此類經驗關係公式由紐賽爾數(Nusselt number)、雷諾數(Reynolds number)或普朗特數(Prandtl number)等物理參數組成之指數形式。其式中 C 、 a 、 b 為常數，必須由實驗數據推導出來。

液態金屬的普朗特數範圍在 0.003 至 0.03 之間，其具有高的熱傳遞速率比其他流體的導熱性高，因此其熱邊界層厚度比起流力邊界層厚度大很多。在關係式中將雷諾數與普朗特數的乘積表示為

$$Pe = Re Pr \quad (2)$$

稱之為培克特數(Peclet number)。過去學者對於此類液態金屬在擾流下流經均勻壁溫(uniform wall temperature)平滑圓管內之經驗關係公式分別為

Seban and Shimazaki [3]提出

$$Nu = 5.0 + 0.025 Pe^{0.8} \quad Pe > 100 \quad (3)$$

Notter and Sleicher [4]提出

$$Nu = 4.8 + 0.0156 Pe^{0.85} Pr^{0.08} \quad \begin{array}{l} 0.004 < Pr < 0.01 \\ Re < 500000 \end{array} \quad (4)$$

Azer and Chao [5]提出

$$Nu = 5.0 + 0.05 Pe^{0.77} Pr^{0.25} \quad \begin{array}{l} Pr < 0.1 \\ Pe < 15000 \end{array} \quad (5)$$

Sleicher and Tribus [6]提出

$$Nu = 4.8 + 0.015 Pe^{0.91} Pr^{0.30} \quad Pr < 0.005 \quad (6)$$

三、數值預測模式

我們將依據 Sleicher 等學者[7]透過實驗有關液態金屬在擾流下流經平滑圓管內之熱傳遞速率，所獲得數據來藉由灰色系統理論中之灰色動態預測模型(Grey Dynamic Model, GDM)，來推導其實驗數據的分析解函數形式之經驗關係公式。

首先分析其實驗數據是屬於不等間隔的數據，依據不等間隔數據的預測模式[10,15,16]，以建立 $GDM(0,2)$ 模型來描述兩組變數的關係。依灰色動態模型的步驟，其預測模式的過程如下：

步驟一：取五筆原始數據如下，

x	x_1	x_2	\cdots	x_5
$f(x)$	f_1	f_2	\cdots	f_5

其中 x_1, x_2, \dots, x_5 為不等間隔，依原來順序排列為

$$[X_1^{(0)}(t)] = [X_1^{(0)}(1), X_1^{(0)}(2), \dots, X_1^{(0)}(5)] = [x_1, x_2, \dots, x_5] \quad (7)$$

$$[X_2^{(0)}(t)] = [X_2^{(0)}(1), X_2^{(0)}(2), \dots, X_2^{(0)}(5)] = [f_1, f_2, \dots, f_5] \quad (8)$$

步驟二：灰色動態模式 $GDM(0,2)$ 之方程式為

$$X_2^{(0)} = b_1 + b_2 X_1^{(0)} \quad (9)$$

步驟三：由累加矩陣 B 及常數向量 y_n 求解方程式之係數向量，如下式

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T y_n \quad (10)$$

此處

$$B = \begin{bmatrix} X_1^{(0)}(1) & 1 \\ X_1^{(0)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ X_1^{(0)}(5) & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$y_n = [X_2^{(0)}(1), X_2^{(0)}(2), \dots, X_2^{(0)}(5)]^T \quad (12)$$

步驟四：可藉由灰色動態模式 $GDM(0,2)$ 之方程式來產生其它預測值

$$\hat{X}_2^{(0)}(t) = b_1 + b_2 X_1^{(0)}(t) \quad (13)$$

依照上述的步驟將依據 Sleicher 等學者[7]的實驗數據之運算後，其獲得數值預測模式為

$$\hat{X}_2^{(0)}(t) = 5.4840849 + 0.0030892 X_1^{(0)}(t) \quad (14)$$

其預測結果與相對誤差之比較，如表一所示

表一、獲得結果與相對誤差之比較

Pe	$Nu [7]$	$\hat{X}_2^{(0)}$	相對誤差	相對誤差率%
527.8	6.8	7.1121	0.3121	4.5294
1102.4	9.1	8.8884	-0.2116	2.3257
1703.1	10.5	10.8284	0.3248	3.1271
2385.0	13.5	12.8518	-0.6482	4.8017
4770.5	20.0	20.2194	0.2194	1.0972
7399.0	29.0	28.3409	0.6592	0.6591

由表一得其總平均之相對誤差率僅有 2.7567%，即其總平均準確率高達 97.2433% 以上，為了解用於計算其預測值之準確度，將與相關學者[3-6]之的經驗關係公式(3)-(6)作比較，如表二所示：

表二、相關學者[3-6]經驗關係公式(3)-(6)的相對誤差之比較

Pe	Nu [7]	公式(3)	相對誤差率%	公式(4)	相對誤差率%
527.8	6.8	8.7663	28.9167	7.1512	5.1647
1102.4	9.1	11.7891	29.5505	9.1974	1.0703
1703.1	10.5	14.6146	39.1866	11.1644	6.3276
2385.0	13.5	17.5872	32.2756	13.2736	1.6770
4770.5	20.0	26.9175	34.5875	20.0752	0.3760
7399.0	29.0	35.8000	23.4482	26.7271	7.8375

Pe	Nu [7]	公式(3)	相對誤差率%	公式(4)	相對誤差率%
527.8	6.8	7.3471	8.0455	6.1927	8.9308
1102.4	9.1	9.1383	4.2087	7.5223	17.3373
1703.1	10.5	10.7847	2.7114	8.8442	15.7695
2385.0	13.5	12.4971	7.4288	10.2943	23.7459
4770.5	20.0	17.7856	11.0720	15.1251	24.3745
7399.0	29.0	22.7395	21.8793	20.0044	31.0193

從表二數據可以發現其總平均之相對誤差率分別為 31.3275 %、3.7422 %、9.2243%與 20.1962%，皆比本預測模式的總平均之相對誤差率 2.7517 %高出很多，即證實本預測模式的準確度高於此三者經驗關係公式。

四、結 論

本文探討液態金屬在擾流狀態下流經平滑圓管內之熱傳遞問題，以灰色系統理論中之灰色動態預測模型，來處理平管內液態金屬擾流狀態熱傳遞之實驗數據結果，並建立數值預測模式。本文所得數值預測模式經由實證過程，可得下列結論：

1. 本文所得數值預測模式的預測值與相關經驗關係式比較後，其誤差率相當的低，足證明灰色動態預測模型的準確度高。
2. 此數值預測模式極適合用於獲得極少且有限數據問題之解析，並輔助實驗過程中無法完成之部分。
3. 此數值預測模式的計算過程十分簡便，無須做因式分析(dimensional analysis)或數值階數(order of magnitude)的推導公式，並可獲得良好結果。

五、參考書籍

1. Holman, J. P., *Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Company, New York, Sixth Edition, (1984).
2. Sleicher, C. A. and Tribus, M., Heat transfer of fluid flowing Turbulently in a smooth pipe and arbitrary wall-temperature distribution, *Trans. ASME* 79, pp.789-797(1957).
3. Seban, R. A. and Shimazaki, T. T., Heat transfer of fluid flowing turbulently in a smooth pipe with walls of constant temperature, *Trans. ASME* 73, pp.803-808(1951).
4. Notter, R. H. and Sleicher, C. A., A solution to the turbulent graetz problem. III. Fully developed and entry region heat transfer rates, *Chem. Eng. Sci.* 27, pp.2073-2093(1972).
5. Azer, N. Z. and Chao, B. T., Turbulent heat transfer in liquid metals-fully developed pipe flow with constant wall temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer* 3, pp.77-83(1972).
6. Sleicher, C. A. and Tribus, M., Heat transfer in a pipe with turbulent flow and arbitrary wall temperature distribution, *Trans. ASME* 79, pp.789-797(1957).
7. Sleicher, C. A., Awad, A. S. and Notter R. H., Temperature and eddy diffusivity

- profiles in NaK, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 16, pp.1656-1575(1973).
8. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 7th Edition, (1979).
 9. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1965).
 10. 鄧聚龍，灰色系統基本方法，華中理工大學出版社，中國，第 1-34 頁(1985)。
 11. 鄧聚龍，灰色控制系統，華中理工大學出版社，中國，第 24-55 頁(1985)。
 12. 鄧聚龍，灰色預測與決策，華中理工大學出版社，中國，第 202-210 頁(1986)。
 13. Deng, J., "Introduction to Grey System Theory", *The Journal of Grey System*, Vol. 1, pp.1-23(1989).
 14. 鄧聚龍，灰色系統理論教程，華中理工大學出版社，中國，第 33-264 頁(1990)。
 15. 史開泉、吳國威、黃有評，灰色信息關係論，全華科技圖書公司，台北，第 12-32 頁(1994)。
 16. 江可達、張福平，灰色動態模型在數值分析上之應用研究，*樹德學報*第二十一期，第 1-13 頁(1998)。
-

The analysis of heat transfer for liquid metals in turbulent flow inside smooth tubes using grey dynamic model

Fu-Ping Chang and Ko-Ta Chiang

ABSTRACT

This paper investigates the experimental data of heat transfer about liquid metals in turbulent flow inside smooth tubes, using the grey dynamic model in grey system theory, and establishes the model of numerical prediction and the empirical formulas. The handle of heat transfer problem will be regarded as a grey system because it is difficult to gain the analysis solution and its messages are incomplete. Results show that the model of numerical prediction in this study has lower error rate in the process of calculation and comparison with the relevant empirical formulas. This model specially suits the problem with extremely less obtained data and will gain the excellent results.

Key words: liquid metals, turbulent flow, heat transfer, empirical formulas, grey dynamic model.