

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

具光線效應的多維非軸對稱圓柱狀介質的輻射熱傳分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2212-E-164-003-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：修平技術學院機械工程系

計畫主持人：歐乃瑞

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 31 日

# 具光線效應的多維非軸對稱圓柱狀介質的輻射熱傳分析

計劃編號：93-2212-E-164-003

執行期間：93年8月1日至94年7月31日

計劃主持人：歐乃瑞

## 摘要

當以離散方向法 (discrete ordinate method, DOM) 在求解熱輻射傳遞方程式時，具有兩大缺點，即光線效應 (ray effect) 與假散射 (false scattering)。光線效應與方向的離散有關，假散射則與空間格點的離散有關。為了克服這兩個缺點，許多不同的方向離散格點與不同修正版本的離散方向法被提出。在此，我們考慮具非均勻分佈的輻射性質在三維非軸對稱柱狀介質中之熱輻射傳遞情形。我們考慮兩種會產生光線效應的問題：(1) 不連續的入射邊界條件或溫度分布；(2) 介質中陡峭的溫度梯度。然後，以本文發展的修正離散方向法求解。

最後我們探討散射比、消散係數、相函數及光學厚度等相關參數對熱輻射傳遞的影響。

**關鍵字：**光線效應、假散射、離散方向法、散射比、相函數、消散係數

## 本文

輻射熱傳在許多工程應用上的熱傳機制上佔有相當重要的地位，如：燃燒爐的設計，太陽能收集器熱傳分析，隔熱材料在飛行器的熱防護系統等。而在輻射熱傳的分析時，自從 Lathrop[1] 開始使用離散方向法 (discrete ordinate method, DOM)，而 Fiveland[2] 其應用於三維輻射熱傳之後，DOM 已普遍廣為應用。DOM 所以成為輻射熱傳分析的一個極為重要的方法之一，是因為它具有下列特色：(1) 可實施至任意高階及精準度，(2) 計算式 (scheme) 推導容易，(3) 可

與對流或擴散的傳輸現象的有限插分法或有限元素法並用。由於上述的優點，近幾十年來，已發展至適用於非等溫 (non-isotherm)、非均勻 (non-homogeneous)、非等向散射 (anisotropic) 及非灰體 (non-grey) 的介質之分析計算了，最近更進一步發展至複雜的幾何形狀。然而，DOM 具有本質上的兩個缺點：(1) 光線效應 (ray effect)，(2) 假散射 (the false scattering)[3]。前者與方向角的離散 (angular discretization) 有關，當輻射強度因介質輻射性質的不連續變化或邊界條件的不連續變化，造成輻射強度在方向角的分布上有強烈的變化，此時以有限的離散方向並不能充分的表示所有方向的輻射強度。後者，假散射與空間格點的離散式有關，可藉著取更多的格點與更精確的空間離散式 (accurate spatial discretization schemes) 來降低其影響[3]。因此如何降低這兩個缺點於使用 DOM 法造成的誤差，成了一個很重要的課題。Chai 等[4] 曾做了關於光線效應及假散射的討論。Thurgood 等[5] 及 Koch 等[6] 提出了不同的離散方向格點，來改善光線效應。Ramankutty 和 Crosbie [7] 與 Liou 和 Wu[8] 發展修正的 DOM，將無因次的輻射強度  $I$  分解成漫射部分  $I^d$  及平行入射部分  $I^c$ 。其中，[7] 以此方法解決邊界上的不連續溫度分布，[8] 以此方法解決 Fresnel 的邊界問題，兩者皆成功的消除了因邊界條件不連續所造成的光線效應。Liu 等[9] 等提出了另一種修正的 DOM，在計算過程中加入一修正均方因子 (renormalizing factor)，以修正因一般 DOM 對於某些複雜高階相函數不滿足對立體角的積分值不等於一的缺點，而改善高度非線性化的相函數產生的光線效應。在以 DOM 求解三維的圓柱形介質的輻射熱傳問題中，近年來文獻仍然不多。Zhang 和 Sutton[10] 以乘積積分法推導出三維的圓柱形

介質的輻射熱傳積分方程式，並求得散射比為空間函數之線性非等向散射軸對稱圓柱的輻射熱傳數值解。而非軸對稱的輻射傳遞方程式中，則因離散方向的方位角會隨著空間位置的方位角的差分變化而改變，而不符合偏微分的定義；且不同離散方向的格點，會有不滿足不同階輻射矩的問題產生。在 Shu[11]文章中，其所取 DOM 的方向採取固定座標，且等間格的格點，所以不會有上述的兩種問題，故本文以方法延伸至三維的輻射熱傳問題。本文另一個欲克服的問題在於如何改善降低光線效應，並發展一個修正的 DOM 來改善因(1)不連續的入射邊界條件或溫度分布，(2)介質中陡峭的溫度梯度兩者所造成的光線效應所產生的誤差。這兩個問題在燃燒爐之正算問題的輻射熱傳分析或逆算問題的求熱源(heat source)與輻射性質，佔了極重要因素。在正算問題中，燃燒爐中常伴隨著傳導或對流，此時溫度讓能量方程式與輻射傳遞方程式耦合一起，而具陡峭溫度梯度分布會造成輻射熱傳部分的光線效應；而在逆算問題中，任何一點因光線效應造成的誤差，可能均會造成估算輻射性質相當大的誤差，因此本文在求得精確的輻射熱傳數值解之後，可更進一步與熱傳導、熱對流結合，作為混模熱傳的基礎，或在逆算問題中，作為一個計算程式的基礎。

### 基本假設及方程式

本文所要探討的問題為一個有限長非軸對稱的三維圓柱的輻射熱傳問題，其幾何形狀及座標系統如圖(一)。本章問題的基本假設如下：

- (1) 介質的具吸收，放射、非等向散射的特性；
- (2) 消散係數與散射比為非軸對稱；
- (3) 考慮的介質為與波長無關的灰體；
- (4) 考慮的邊界不連續的散漫輻射入射；
- (5) 介質之邊界為不反射。

輻射傳遞方程式的無因次表示式及邊界條件可表示如下：

$$\hat{s} \cdot \nabla I(\bar{r}, \hat{s}) + \beta(\bar{r})I(\bar{r}, \hat{s}) = (1 - \omega)I_b(\bar{r}, \hat{s}) + \frac{\omega(\bar{r})\beta(\bar{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\bar{r}, \hat{s}')\Phi(\bar{r}, \hat{s}, \hat{s}')d\Omega, \quad (1)$$

$$I(\bar{r}_w, \hat{s}) = I^d(\bar{r}_o, \hat{s}). \quad (2)$$

其中， $I$  為無因次的輻射強度； $\hat{s}$  表示輻射強度的方向； $\bar{r}$  為位置向量； $\beta$  為無因次消散係數，定義為  $(\kappa + \sigma_s)r_o$ ， $r_o$  為半徑； $\omega$  為散射比，定義為  $\sigma_s/\beta$ ； $\Phi$  為相函數； $\Omega$  為立體角； $F_o$  為邊介入射的輻射強度分布。

當我們以傳統的 DOM 求解方程式(1)與(2)時，因邊界條件的入射項不連續或為平行入射(collimated incidence)時，即產生光線效應[3-8]。因此，[7]與[8]以修正的離散方向法(Modified discrete ordinate method)將輻射強度  $I$  分解成未參與散射部分  $I^a$  及參與散射部分  $I^s$ ，如此輻射傳遞方程式及邊界條件可分解成兩組，表示如下：

$$\hat{s} \cdot \nabla I^a(\bar{r}, \hat{s}) + \beta I^a(\bar{r}, \hat{s}) = 0, \quad (3)$$

$$I^a(\bar{r}_o, \hat{s}) = I^d(\bar{r}_o, \hat{s}), \quad (4)$$

與

$$\hat{s} \cdot \nabla I_s(\bar{r}, \hat{s}) + \beta(\bar{r})I^s(\bar{r}, \hat{s}) = [1 - \omega(\bar{r})]I_b(\bar{r}) + \frac{\omega(\bar{r})\beta(\bar{r})}{4\pi}, \quad (5)$$

$$\times \int_{4\pi} [I^a(\bar{r}, \hat{s}) + I^s(\bar{r}, \hat{s})]\Phi(\bar{r}, \hat{s}, \hat{s}')d\Omega$$

$$I^s(\bar{r}_o, \hat{s}) = 0. \quad (6)$$

接著，我們考慮當介質具陡峭的溫度梯度時，此時以 MDOM 法也無法改善光線效應，因此我們參考[3]的做法，將方程式(3)及(5)更進一步修改成如下：

$$\hat{s} \cdot \nabla I^a(\bar{r}, \hat{s}) + \beta I^a(\bar{r}, \hat{s}) = [1 - \omega(\bar{r})]I_b(\bar{r}), \quad (7)$$

$$\hat{s} \cdot \nabla I^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) + \beta(\bar{r})I^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) = 0 \quad (8)$$

與

$$\hat{s} \cdot \nabla I^{s2}(\bar{r}, \hat{s}) + \beta(\bar{r})I^{s2}(\bar{r}, \hat{s}) = S^a(\bar{r}, \hat{s}) + S^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) + S^{s2}(\bar{r}, \hat{s}) \quad (9)$$

其中， $S^a(\bar{r}, \hat{s})$ 、 $S^{s1}(\bar{r}, \hat{s})$  與  $S^{s2}(\bar{r}, \hat{s})$  分別為  $I^a$ 、 $I^{s1}$  與  $I^{s2}$  所對應的源函數(source function)，表示如下：

$$S^a(\bar{r}, \hat{s}) = \frac{\omega(\bar{r})\beta(\bar{r})}{4\pi} \times \int_{4\pi} I^a(\bar{r}, \hat{s}')\Phi(\bar{r}, \hat{s}, \hat{s}')d\Omega \quad (10)$$

$$S^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) = \frac{\omega(\bar{r})\beta(\bar{r})}{4\pi} \times \int_{4\pi} I^{s1}(\bar{r}, \hat{s}') \Phi(\bar{r}, \hat{s}, \hat{s}') d\Omega \quad (11)$$

$$S^{s2}(\bar{r}, \hat{s}) = \frac{\omega(\bar{r})\beta(\bar{r})}{4\pi} \times \int_{4\pi} I^{s2}(\bar{r}, \hat{s}') \Phi(\bar{r}, \hat{s}, \hat{s}') d\Omega \quad (12)$$

方程式 (7) 與 (9) 對應於邊界條件 (6)，而方程式 (8) 對應於邊界條件 (4)。以下，我們將對  $S^{s1}(\bar{r}, \hat{s})$  及  $S^a(\bar{r}, \hat{s})$  這二部份分別討論：

$S^{s1}(\bar{r}, \hat{s})$  部分：

求解方程式 (8) 與對應的邊界條件 (4) 時，當考慮到散漫入射邊界為不連續分佈，避免以傳統的 DOM 法求解，會造成光線效應 (ray effect)，此時我們以分區積分來求解  $S^{s1}(\bar{r}, \hat{s})$ 。方程式 (8) 的形式解可表示如下：

$$I^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) = I_i^d(\bar{r}_w^i, \hat{s}) \exp(-\tau_w^i) \quad (13)$$

其中， $\tau_w^i = \int_0^s \beta ds'$ ， $s = |\bar{r} - \bar{r}_w^i|$ 。考慮圓柱表面分成上表面、側表面及下表面，分別以下標 1、2 和 3 相對應，將 (13) 式代入 (11) 式，並將立體角以下列式子表示：

$$d\Omega = \cos(n_i, \hat{s}) dA_i / s^2 \quad (14)$$

，故方程式 (11) 可以改寫如下：

$$S^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) = \frac{\omega(\bar{r})\beta(\bar{r})}{4\pi} \times \sum_{k=1}^3 \iint_{A_k} I^{s1}(\bar{r}, \hat{s}') \times \Phi(\bar{r}, \hat{s}, \hat{s}') \cos(n_k, \hat{s}') dA_k / s_k^2 \quad (15)$$

考慮到圓柱座標，如圖一及圖二所示， $A_k$  為第  $k$  表面的面積； $\theta_k$  為  $n_k$  與入射方向  $\hat{s}_i$  夾角； $n_k$  為第  $k$  表面的法線向量； $s_i(r_w^i, \psi_w^i, z_w^i)$  為入射點到所考慮的點的距離，亦即

$$s_i(r_w^i, \psi_w^i, z_w^i) = \left[ (z - z_w^i)^2 + \rho(r_w^i, \psi_w^i)^2 \right]^{1/2}$$

，在此  $\rho(r_w^i, \psi_w^i)$  為邊界入射點  $(r_w^i, \psi_w^i, z_w^i)$  到所考慮點  $(r, \psi, z)$  的距離在  $r-\psi$  平面上的投影，

$$\rho(r_w^i, \psi_w^i) = \left[ r^2 + (r_w^i)^2 - 2rr_w^i \cos(\psi - \psi_w^i) \right]^{1/2}。$$

首先，我們考慮上表面，對應之下標為 1，其微面積可表示為  $dA_1 = \rho d\rho d\psi$ ，此時  $z_1 = L$ ，

$$\cos(n_1, \hat{s}_i) = \cos(\theta_1)，$$

$$\cos(\theta_1) = (L - z) / s_1(r_w^i, \psi_w^i, L) \quad (16)$$

$$\rho(r_w^i, \psi_w^i) = (L - z) \tan(\theta_1) \quad (17)$$

$$d\rho = (L - z) \sec^2(\theta_1) d\theta_1 \quad (18)$$

其中， $Q_{c1} = \sin^{-1} \left[ \rho(R_o, \psi_w^i) / s_1(R_o, \psi_w^i, L) \right]$ ， $0 \leq \theta_1 \leq Q_{c1}$ 。將 (16)、(17) 和 (18) 代入 (14) 式，推得

$$d\Omega = \sin(\theta_1) d\psi d\theta_1 \quad (19)$$

接著，在相同變數變換，下表面其對應下標 3，亦可推得  $d\Omega = \sin(\theta_3) d\psi d\theta_3$ ，

$$Q_{c2} \leq \theta_3 \leq \pi$$

， $Q_{c2} = \sin^{-1} \left[ \rho(R_o, \psi_w^i) / s_3(R_o, \psi_w^i, 0) \right]$ 。最後，

考慮側邊表面積，當其對應的側表面微面積  $dA_2 = \rho dz d\psi$ ， $\cos(n_2, \hat{s}_i) = \sin(\theta_2)$

$$s_2(R_o, \psi_w^i, z_w^i) = \rho(R_o, \psi_w^i) / \csc(\theta_2) \quad (20)$$

$$(z_i - z) = \rho(R_o, \psi_w^i) \cot(\theta_2) \quad (21)$$

$$dz = \rho(R_o, \psi_w^i) \csc^2(\theta_2) d\theta_2 \quad (22)$$

其中， $Q_{c1} \leq \theta_2 \leq Q_{c2}$ ，代入 (14) 式，同樣推得  $d\Omega = \sin(\theta_i) d\psi d\theta_i$ 。然後將 (17) ~ (21) 式及 (22) 式分別代入 (15) 式，可推得：

$$S^{s1}(\bar{r}, \hat{s}) = \frac{\omega\beta}{4\pi} \times \int_0^{2\pi} d\psi_i \left[ \int_0^{Q_{c1}} I_1^d \exp(-\tau_i) \Phi \sin(\theta_1) d\theta_1 + \int_{Q_{c1}}^{Q_{c2}} I_2^d \exp(-\tau_i) \Phi \sin(\theta_2) d\theta_2 + \int_{Q_{c2}}^{\pi} I_3^d \exp(-\tau_i) \Phi \sin(\theta_3) d\theta_3 \right] \quad (23)$$

$S_a(\bar{r}, \hat{s})$  部分：

方程式 (7) 的形式解可表示如下：

$$I^a(\bar{r}, \hat{s}) = \int_0^s (1 - \omega) I_b(\bar{r}', \hat{s}') \exp(-\tau') ds' \quad (24)$$

其中， $s = |\bar{r} - \bar{r}'|$ ， $\tau' = \int_s^s \beta ds''$ ， $s' = |\bar{r} - \bar{r}'|$ ；

如圖一及圖二所示。如此所得的解為離散方向法的精確解。由圖二幾何關係所示，當沿著一固定方向，可推得  $\sin\theta' ds' = d\rho'$ ，同時參考

(19) 式，可推得  $ds' d\Omega = d\rho' d\psi d\theta$ ，故將可改寫 (10) 式如下：

$$S^a(r, \psi, z, \psi_x, \theta) = \frac{\omega\beta}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_o} (1-\omega) I_b \times \exp(-\tau') \Phi d\rho' d\psi d\theta \quad (25)$$

其中， $\rho_o$  為考慮的點 $(\bar{r}, \hat{s})$ 到邊界的點之距離在 $r-\psi$ 平面的投影量。然後以數值積分求得精確解，以避免因溫度梯度過大造成的光線效應 (ray effect)，將所求得的 $I^a$ 帶入方程式 (10) 求得 $S_a(\bar{r}, \hat{s})$ 。

在求得 $I^a$ 、 $I^{s1}$ 及 $I^{s2}$ 之後，我們接著推導徑向輻射熱通量。徑向輻射熱通量通式 $q^r = \bar{q} \cdot \bar{e}_r$ ，可表示為 $q^r = \int_{4\pi} I(r, \hat{s}') \hat{s}' \cdot \bar{e}_r d\Omega$ ，參考圖一，方向餘弦以圓柱座標可表示為 $\hat{s}' = \cos(\psi'_x) \sin(\theta') \bar{i} + \sin(\psi'_x) \sin(\theta') \bar{j} + \cos(\theta') \bar{k}$ ，徑向單位向量可表示 $\bar{e}_r = \cos(\psi) \bar{i} + \sin(\psi) \bar{j}$ ，並代入 (19) 式則徑向輻射熱通量通的三維圓柱座標通式為：

$$q^r(r, \psi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(r, \psi, z, \psi'_x, \theta') \times \cos(\psi - \psi'_x) \sin^2(\theta') d\theta' d\psi'_x \quad (26)$$

然後，因輻射強度以分成三個分量，所以類似源函數的推導，我們可將 (25) 式更進一步推得如下：

$$q^r(r, \psi, z) = q_{s_1}^r + q_{s_2}^r + q_a^r \quad (27)$$

其中

$$q_{s_1}^r(r, \psi, z) = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{Q_{c1}} I_1^d \exp(-\tau_i) \sin^2(\theta_1) \times \cos(\psi - \psi_i) d\theta_1 + \int_{Q_{c1}}^{Q_{c2}} I_2^d \exp(-\tau_i) \sin^2(\theta_2) \times \cos(\psi - \psi_i) d\theta_2 + \int_{Q_{c2}}^\pi I_3^d \exp(-\tau_i) \sin^2(\theta_3) \cos(\psi - \psi_i) d\theta_3 \right] d\psi \quad (28)$$

$$q_{s_2}^r(r, \psi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I^{s2}(r, \psi, z, \psi'_x, \theta') \times \cos(\psi - \psi'_x) \sin^2(\theta') d\theta' d\psi'_x \quad (29)$$

$$q_a^r(r, \psi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\rho_o} (1-\omega) I_b(\rho', \psi'_x, \theta') \times \cos(\psi - \psi'_x) \sin(\theta') d\rho' d\theta' d\psi'_x \quad (30)$$

同理，可求得切線方向、軸向輻射熱通量及全球積分輻射強度。

### 數值方法

首先，為了數值運算將 $\mu$ 、 $\eta$ 及 $\xi$ 離散化，我們僅考慮某些特定的方向，且每個特定的方向都有一個相對應的方向權函數，在此我們採用以下符號：

$$\mu_{n,m} = \cos[\psi - (\psi_x)_n] \sin(\theta_m) \quad (31)$$

$$\eta_{n,m} = \sin[\psi - (\psi_x)_n] \sin(\theta_m) \quad (32)$$

$$\xi_m = \cos(\theta_m) \quad (33)$$

則 (9) 式的離散方向近似式可表示如下：

$$\begin{aligned} & \mu_{n,m}(\psi) \frac{\partial}{\partial r} I_{n,m}^{s2}(r, \psi, z) + \frac{\eta_{n,m}(\psi)}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} I_{n,m}^{s2}(r, \psi, z) \\ & + \xi_m \frac{\partial}{\partial z} I_{n,m}^{s2}(r, \psi, z) + \beta(r, \psi, z) I_{n,m}^{s2}(r, \psi, z) \\ & = S_{n,m}^a + S_{n,m}^{s1} + S_{n,m}^{s2} \end{aligned} \quad (34)$$

其中，下標 $n$ 及 $m$ 表離散方向； $S_{n,m}^a(r, \psi, z)$ 在離散方向的近似式的表示式為：

$$\begin{aligned} S_{n,m}^a(r, \psi, z) &= \sum_{n'=1}^{N_{\psi_x}} \sum_{m'=1}^{M_\theta} \frac{\omega(r, \psi, z) \beta(r, \psi, z)}{4\pi} \\ & \times \frac{\rho_o}{2} \sum_{j=1}^{J_\rho} (1-\omega) I_b(r, \psi, z) \Phi_{n,m,n',m'}(r, \psi, z) w_{n',m'} w_j \end{aligned} \quad (35)$$

在此， $w_{n',m'}$ 表離散方向的權值； $N_{\psi_x}$ 表示方位角在介於 $0 \leq \psi_x \leq 2\pi$ 所取的離散方向總數； $M_\theta$ 代表極角在 $-1 \leq \xi \leq 1$ 所取的離散方向總數； $w_j$ 表 $\rho$ 方向的權值； $J_\rho$ 為 $\rho$ 方向所取的高斯隔點點數；而相函數以雷建德多項式表示為：

$$\Phi_{n,m,n',m'}(r, \psi) = \sum_{l=0}^L a_l(r, \psi) P_l(v_{n,m,n',m'}) \quad (36)$$

其中， $v_{n,m,n',m'} = \mu_{n,m} \mu_{n',m'} + \eta_{n,m} \eta_{n',m'} + \xi_m \xi_{m'}$ ， $a_0 = 1$ ， $L$ 為非等項散射階數，當 $l=0$ 為等向散射 (isotropic scattering)。接著，在 (23) 式中我們對 $\psi_x$ 方向，以等間隔的辛普森法則 (Simpson's rule) 於 $\psi_x$ 方向做 $0 \sim 2\pi$ 積分，而 $\theta$ 方向採高斯積分法，並以變數變換 $\xi = \cos \theta$ 轉換其積分上、下界於 $-1 \sim 1$ 之間，故其離散方向近似式的表示式為：

$$S_{n,m}^{s1}(r,\psi,z) = \frac{\omega(r,\psi,z)\beta(r,\psi,z)}{4\pi} \times \left[ \sum_{n_i=1}^N w_{n_i} \Delta\psi_N \left[ \frac{Q_{c1}}{2} \sum_{m_i=1}^M I_1^d \exp(-\tau_w^i) \Phi_{n,m,n_i,m_i}(r,\psi,z) w_{m_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(Q_{c2}-Q_{c1})}{2} \sum_{m_i=1}^M I_2^d \exp(-\tau_w^i) \Phi_{n,m,n_i,m_i}(r,\psi,z) w_{m_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\pi-Q_{c2})}{2} \sum_{m_i=1}^M I_3^d \exp(-\tau_w^i) \Phi_{n,m,n_i,m_i}(r,\psi,z) w_{m_i} \right] \right] \quad (37)$$

其中， $w_n$  為辛普森積分的係數； $\Delta\psi_N = 2\pi/N$ ； $N$  為  $\psi_x$  方向積分的總點數； $w_m$  為高斯積分的權函數； $M$  為  $\theta$  方向的總點數。最後， $S_{n,m}^{s2}(r,\psi,z)$  離散方向近似式的表示式為：

$$S_{n,m}^{s2}(r,\psi,z) = \frac{\beta(r,\psi,z)\omega(r,\psi,z)}{4\pi} \quad (38)$$

$$\times \sum_{n'=1}^{N_{\psi_x}} \sum_{m'=1}^{M_{\theta}} I_{n',m'}^{s2}(r,\psi,z) \Phi^{n',m',n,m}(r,\psi,z) w_{n',m'}$$

然後，我們以有限體積法（finite volume method），將整個區域劃分成  $N_r \times N_\psi \times N_z$  個格子，在此  $N_r$ 、 $N_\psi$  與  $N_z$  分別代表在  $r$ 、 $\psi$  與  $z$  方向的格子數目，並以控制體積中心點與邊界點之輻射強度的差分式，如下：

$$I_{n,m}^{i+1/2,j,k} = (1+h)I_{n,m}^{i,j,k} - hI_{n,m}^{i-1/2,j,k} \quad \mu_{n,m}^j > 0 \quad (39)$$

$$I_{n,m}^{i-1/2,j,k} = (1+h)I_{n,m}^{i,j,k} - hI_{n,m}^{i+1/2,j,k} \quad \mu_{n,m}^j < 0 \quad (40)$$

$$I_{n,m}^{i,j+1/2,k} = (1+h)I_{n,m}^{i,j,k} - hI_{n,m}^{i,j-1/2,k} \quad \eta_{n,m}^j > 0 \quad (41)$$

$$I_{n,m}^{i,j-1/2,k} = (1+h)I_{n,m}^{i,j,k} - hI_{n,m}^{i,j+1/2,k} \quad \eta_{n,m}^j < 0 \quad (42)$$

$$I_{n,m}^{i,j,k+1/2} = (1+h)I_{n,m}^{i,j,k} - hI_{n,m}^{i,j,k-1/2} \quad \xi_m > 0 \quad (43)$$

$$I_{n,m}^{i,j,k-1/2} = (1+h)I_{n,m}^{i,j,k} - hI_{n,m}^{i,j,k+1/2} \quad \xi_m < 0 \quad (44)$$

藉由與[11]相同的步驟，推得到方程式(33)之空間微分的有限差分近似式，以  $\mu_{n,m}^j > 0$ ， $\eta_{n,m}^j > 0$  和  $\xi_m > 0$  為例，可得到：

$$I_{n,m}^{s2}(i,j,k) = \left\{ A'I_{n,m}^{s2}(i-1/2,j,k) + B'I_{n,m}^{s2}(i,j-1/2) + C'I_{n,m}^{s2}(i,j,k-1/2) \right. \\ \left. + V_{i,j,k} \left[ S_{n,m}^a(i,j,k) + S_{n,m}^{s1}(i,j,k) \right. \right. \\ \left. \left. S_{n,m}^{s2}(i,j,k) \right] \right\} / (A'' + B'' + C'' + \beta_{i,j,k} V_{i,j,k}) \quad (45)$$

其中，

$$A' = \mu_{n,m}^j (hA_{i+1/2} + A_{i-1/2}) \Delta r \Delta z \quad (46)$$

$$B' = (h\eta_{n,m}^{j+1/2} + \eta_{n,m}^{j-1/2}) \Delta r \Delta z \quad (47)$$

$$C' = \frac{(1+h)}{2} \left[ (r_{i+1/2})^2 - (r_{i-1/2})^2 \right] \xi_m \Delta \psi \quad (48)$$

$$A'' = \mu_{n,m}^j (1+h) A_{i+1/2} \Delta r \Delta z \quad (49)$$

$$B'' = (1+h) \eta_{n,m}^{j+1/2} \Delta r \Delta z \quad (50)$$

$$C'' = \frac{(1+h)}{2} \left[ (r_{i+1/2})^2 - (r_{i-1/2})^2 \right] \xi_m \Delta \psi \quad (51)$$

$$V_{i,j,k} = \frac{1}{2} (r_{i+1/2} - r_{i-1/2}) \Delta r^2 \Delta \psi \Delta z \quad (52)$$

而其他相關象限的  $I_{i,j,k}^{n,m}$  ( $\mu_{n,m}^{n,m,j} > 0$ ， $\eta_{n,m}^{n,m,j} > 0$  和  $\xi_m < 0$ ； $\mu_{n,m}^{n,m,j} > 0$ ， $\eta_{n,m}^{n,m,j} < 0$  和  $\xi_m > 0$ ； $\mu_{n,m}^{n,m,j} > 0$ ， $\eta_{n,m}^{n,m,j} < 0$  和  $\xi_m < 0$ ；.....) 可以用類似方法推得。

然後，我們以高斯-謝德疊帶法(Gauss-Sidel iteration)，來求解熱輻射傳離散方程式，疊代順序在空間格點上可分為八個掃動象限（sweep quadrant），不同的掃動象限由方向餘弦  $\mu_{n,m}^j$ 、 $\eta_{n,m}^j$  和  $\xi_m$  的正負決定。我們以  $\mu_{n,m}^j > 0$ ， $\eta_{n,m}^j > 0$  和  $\xi_m > 0$  為例，在空間格點上疊代順序為  $1 \rightarrow N_r$ ， $1 \rightarrow N_\psi$ ， $1 \rightarrow N_z$ ，聯立解方程式（39）、（41）、（43）與（45）且掃動象限為（I）。迭代的收斂條件必須滿足

$$\left| \frac{(I_{n,m}^{i,j,k})^{K_{th}} - (I_{n,m}^{i,j,k})^{K_{th}-1}}{(I_{n,m}^{i,j,k})^{K_{th}}} \right| \leq 10^{-5} \quad (53)$$

其中，上標  $K_{th}$  為第  $K$ th 次迭代。

最後，給予相關的吸收係數、散射係數等輻射參數，即可求得相對應的輻射通量。

## 結果與討論

首先，與既有的文獻做比較，以驗證本文計算方法的正確性。我們首先與文獻[10]做比

較，討論一軸對稱圓柱介質，具熱源  $I_b(r,z) = (r/z)^2$ ，等向散射  $\Phi = 1$ ，消散係數為 1， $\beta = 1$ ，僅有側面散漫入射， $I_w(R,z) = 1$ ， $I_w(r,0) = I_w(r,L) = 0$ 。在採格子點數  $N_r \times N_\psi \times N_z = 20 \times 48 \times 20$  及方向數  $N_{\psi_x} \times M_\theta = 12 \times 5$  下，由表 1，在不同散射比  $\omega = 0.3, 0.5, 0.9$ ，可得到與[10]相當一致的結果，由此可得到本文在邊界不連續的入射分佈時，可改善其產生的光線效應，得到相當精準的結果。

接著，我們考慮在介質中具陡峭的溫度分佈。在此，我們考慮一軸對稱圓柱介質，在邊界入射為 0，消散係數為 1， $\beta = 1$ ，等向散射， $\Phi = 1$ ；在不同的散射比  $\omega = 0$  的情況下，黑體的輻射強度以  $z = 0.5$  為中心沿著  $z$  軸做高斯分佈（Gaussian profile）， $I_b(r,z) = \exp\left[-(r-0.5)^2 / (2\sigma)^2\right] / \left[\sigma(2\pi)^{1/2}\right]$ ， $\sigma = 0.1$ 。我們以傳統的 DOM 及本文修正的 MDOM 做比較，當格子點數  $N_r \times N_\psi \times N_z = 20 \times 48 \times 20$  及方向數  $N_{\psi_x} \times M_\theta = 12 \times 5$  時，由圖 3，可看出由 DOM 所得  $q^r$  分佈的結果會產生抖動，但增加格子點數  $N_r \times N_\psi \times N_z = 40 \times 96 \times 40$  及方向數數目  $N_{\psi_x} \times M_\theta = 16 \times 7$ ，則此抖動會減少，這很明顯的即是具有光線效應的特色。但以本文修正的 MDOM，不論格子點數及方向數數目是否增加，均不會產生抖動，即不具光線效應的現象。

最後，當改變散射比為  $\omega = 0.9$  時，由圖 4，傳統的 DOM 法所求得的  $q^r$  分佈會產生陡動，但陡動較圖 3 的幅度相對較小，此時一樣增加格子點數  $N_r \times N_\psi \times N_z = 40 \times 96 \times 40$  及方向數數目  $N_{\psi_x} \times M_\theta = 16 \times 7$ ，與圖 3 一樣可看出明顯降低誤差。而本文修正的 MDOM 法與圖 3 一樣，均不會產生抖動，即不具光線效應的現象。

綜合以上所述，很明顯的，本文修正的 MDOM 法不僅能改善邊界不連續造成的光線效應，且對於介質具陡峭的溫度分佈造成的光線效應能有效的改善，這是因為我們將（24）式所求的擬解析解（quasi-exact

solution），若以之求得各離散方向的解，一樣會具有光線效應。這是因為其分佈型式，受介質中黑體輻射  $I_b$  不均勻分佈的影響，在方向上呈極度不均勻的分佈，因此在（10）式的積分會產生誤差，造成光線效應。因此我們將（10）式以轉化成體積分，類似邊界的分區積分，而消除因陡峭的溫度分佈所產生的光線效應。

## 參考文獻

### Reference

- [1] Carlson B.G. and Lathrop K.D., Transport theory—the method of discrete-ordinates. In: Greenspan H, Kelber C. and Okrent D.(Ed.), Computing methods in reactor physics, Gordon & Breach, NewYork, 1968, pp. 171-266.
- [2] Fiveland W.A., Discrete-ordinates solution of the radiative transport equation for rectangular enclosures, J. Heat Transfer, 106(1984), pp. 699-706.
- [3] Coelho P.J., The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified discrete ordinates methods, JQSRT, 73(2002), pp. 231-238.
- [4] Chai J.C., Lee H.S., and Patankar S.V., Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method. Numer. Heat Transfer Part B: Fundamentals, 24(1993), pp.373-89.
- [5] Thurgood C.P., Pollard A., and Becker H.A., The  $T_N$  quadrature set for the discrete ordinates method, J Heat Transfer, 117(1995), pp. 1068-1070.
- [6] Koch R., Krebs W., Wittig S., and Viskanta R., Discrete ordinates quadrature schemes for multidimensional radiative transfer, JQSRT 53(1995), pp. 353-72.
- [7] Ramankutty M.A. and Crosbie A.L., Modified discrete ordinates solution of radiative transfer in two-dimensional

rectangular enclosures. JQSRT, 57(1997), pp. 107-140.

- [8] Liou B.T. and Wu C.Y., Ray effects in the discrete ordinate solution for surface radiation exchange, I. J. Heat and Mass Transfer, 32(1997), pp. 271-275.
- [9] Liu L.H., Ruan L.M. and Tan H.P., On the discrete ordinates method for radiative heat transfer in anisotropically scattering media, I. J. Heat and Mass Transfer, 45(2002), pp. 3259-3262.
- [10] Zhang J.M. and Sutton W.H., Multidimensional radiative transfer in absorbing, emitting, and linearly anisotropic scattering cylindrical medium with space-dependent properties, JQSRT, 52(1994), pp. 791-808.
- [11] Hsu S.C., Wu C.Y. and Ou N.R., Azimuthally dependent radiative transfer in a nonhomogeneous cylindrical medium, Radiation Physics and Chemistry 53 (1998), pp.107-113
- [12] Crosbie A.L. and Schrenker R.G., Radiative transfer in a two-dimensional rectangular medium exposed to diffuse radiation, JQSRT, 31(1984), pp. 339-72.
- [13] 歐乃瑞, 以斷層掃描重構多為介值的吸收及散射性質, 博士論文-國立成功大學機械工程研究所, 2002年七月。

**Abstract**

Ray effects and false scattering are two major shortcomings of discrete ordinates method (DOM). Ray effects are related to the angular discretization, while false scattering is related to the spatial discretization. To avoid the inaccuracy of the DOM, several different sets of quadratures are proposed and different versions of modified DOM are developed. In the present

study, we consider azimuthally dependent radiative heat transfer in a three dimensional cylindrical medium with non-uniform properties. The medium is assumed to be absorbing, emitting and scattering. We also consider (1) discontinuous incident radiation or discontinuous temperature distribution on the boundary, (2) sharp gradient of temperature distribution within the medium considered. The two conditions may cause ray effects by the traditional DOM. To treat the errors due to ray effects, we developed a new version of modified DOM to obtain the radiative heat flux and radiative intensity and to compare the results obtained by the standard DOM.

By comparing of the present results with those reported by the other work, we can verify whether this new version of DOM works. In the meantime, the effects of spatially variable albedo, phase function and extinction coefficient on radiative transfer in a cylindrical medium are investigated.

**Keywords:** *ray effect, false scattering, discrete ordinate method, albedo, phase function, extinction coefficient*

表 1 與 Zhang[10]在介質中具熱源

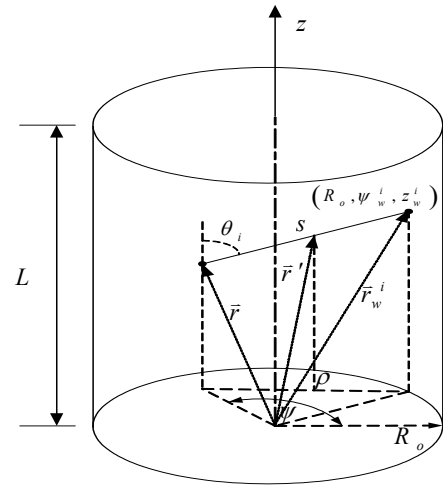
且不連續的邊界入射之輻射通量

的比較： $I_w(\tau_r, 0) = I_w(\tau_r, \tau_L) = 0$ ,  $\tau_r = \tau_L = 1.0$

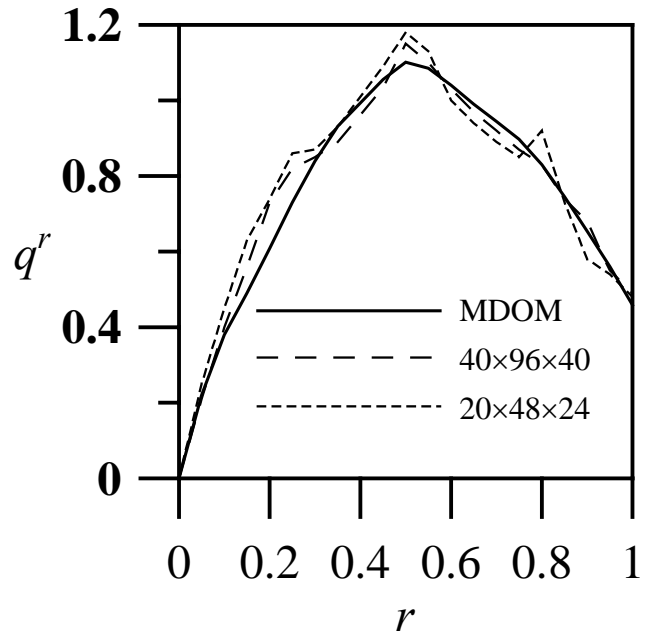
$I_b(\tau_r, \tau_z) = (\tau_r / \tau_z)^2, I_w(\tau_r, \tau_z) = 1$				
$\omega = 0.3$				
	Zhang	Present work	Zhang	Present work
	$-q_z(\tau_r, 0.25\tau_L)$		$-q_z(\tau_r, 0.4\tau_L)$	



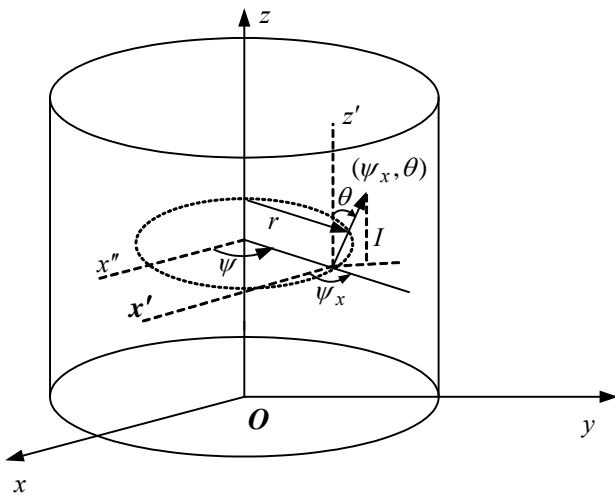
0.0	0.5773	0.5765	0.2416	0.2405
0.2	0.6116	0.6089	0.2549	0.2539
0.4	0.7085	0.6998	0.2907	0.2896
0.6	0.8347	0.8289	0.3290	0.3287
0.8	0.8463	0.8421	0.3052	0.3082
1.0	0.3887	0.3889	0.1475	0.1489
$\omega = 0.5$				
	$-q_r(\tau_r, 0.25\tau_L)$		$-q_r(\tau_r, 0.5\tau_L)$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.4362	0.4359	0.4949	0.4978
0.4	0.8608	0.8538	0.9763	0.9774
0.6	1.2651	1.2658	1.4122	1.4125
0.8	1.6344	1.6325	1.6979	1.6974
1.0	1.6807	1.6812	1.5859	1.5864
$\omega = 0.9$				
	$-q_z(\tau_r, 0.25\tau_L)$		$-q_z(\tau_r, 0.4\tau_L)$	
0.0	0.7369	0.7365	0.3074	0.3023
0.2	0.7625	0.7649	0.3178	0.3156
0.4	0.8356	0.8346	0.3460	0.3455
0.6	0.9295	0.9259	0.3736	0.3745
0.8	0.9063	0.8985	0.3356	0.3383
1.0	0.4100	0.3995	0.1595	0.1574
	$-q_r(\tau_r, 0.25\tau_L)$		$-q_r(\tau_r, 0.5\tau_L)$	
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.3115	0.3105	0.36056	0.3612
0.4	0.6415	0.6425	0.7402	0.7413
0.6	1.0156	1.0138	1.1418	1.1638
0.8	1.4644	1.4623	1.4992	1.5012
1.0	1.7300	1.7213	1.6141	1.6093



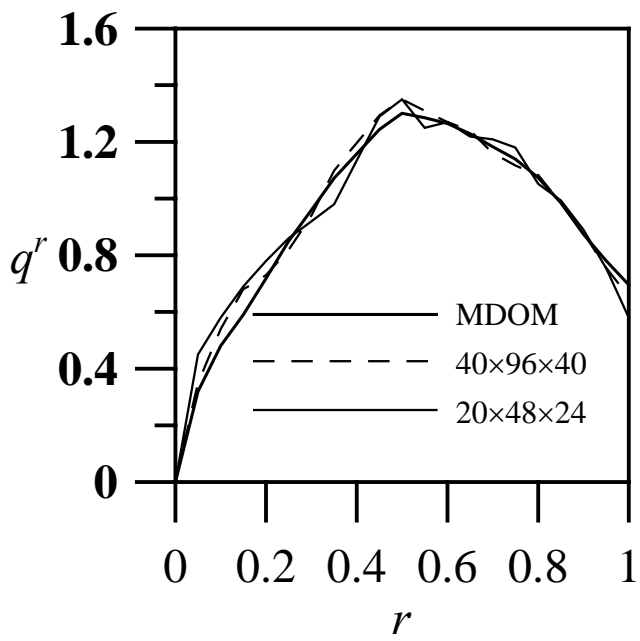
圖二 輻射強度路徑示意圖



圖三  $\omega=0$  ,  $q^r$  在  $z=0.5$  對  $r$  之分佈圖



圖(一) 幾何座標圖



圖四  $\omega = 0.99$  ,  $q^r$  在  $z=0.5$  對  $r$  之分佈圖