

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

具 Fresnel 邊界的二維非軸對稱圓柱介質之輻射熱傳分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-164-005-

執行期間：94 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日

執行單位：修平技術學院機械工程系

計畫主持人：歐乃瑞

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 31 日

具Fresnel邊界的二維非軸對稱圓柱介質之輻射熱傳分析

計劃編號：NSC 94-2212-E-164-005

執行期間：94年8月1日至95年7月31日

計劃主持人：歐乃瑞

摘要

輻射傳輸方程式 (radiative transport equation, RTE) 是一個積微分方程式，而且輻射強度不僅與位置變數相關且與空間的角度有關。因此，其分析顯得相當複雜，若再考慮折射率不為 1 的 Fresnel 介面，更是複雜。

在許多求解輻射傳輸方程式的方法中，離散方向法 (discrete ordinate method, DOM) 是一個非常受歡迎的方法之一，因為它具有下列特色：(1)可實施至任意高階及精準度，(2)計算式(scheme)推導容易，(3)可與對流或擴散的傳輸現象的有限插分法或有限元素法並用。然而，當輻射強度由邊界入射，入射光線在方向上的不連續變化與反射係數與方向角有關時，這兩因素造成輻射強度在方向角的分布上有強烈的變化，此時以有限的離散方向並不能充分的表示所有方向的輻射強度，而產生光線效應(ray effect)。

在本文中，我們考慮光線由邊界平行入射，介質具散射性質的二維非軸對稱的圓柱之輻射熱傳題，邊界為Fresnel 界面且折射遵循Snell 定律。。我們以修正的離散方向法來求解輻射傳輸方程式，將無因次的輻射強度 I 分解成平行入射部分 I^c 和散射部分 I^d ，藉由求出 I^c 的近似解來降低因入射光線方向上不連續產生的光線效應。在以 $r-\psi$ 為主的圓柱座標中，光線由側邊入射，導致每次反射點位置與反射的方向均會變化，且反射次數越多，方向變化越複雜，欲求出所有反射方向幾乎是不可能的。因此，為了簡化問題並求得 I^c 近似解，我們利用忽略經由 (1)多

次反射而造成反射係數乘積很小與(2)輻射強度因多次反射而造成光線所走過的光學路徑太長，而導致輻射強度在介質中因消散的結果而變得很小，使得其對 I^c 部分的貢獻微乎其微。在忽略上述兩者因素之後，我們求出其餘所剩不可忽略經有限次數反射的入射光線對 I^c 部分的貢獻，如此得到 I^c 的近似解。同理，藉由此方法可求得輻射傳輸方程式中，平行入射部分所產生的源函數 S^c ，以擴展至介質具散射性質的輻射熱傳問題，進而求得二維非軸對稱具Fresnel邊界之輻射熱傳問題之解。

關鍵字：Fresnel邊界，Snell 定律，離散方向法

本文

輻射熱傳在許多工程應用、熱傳機構與醫學工程的研究分析上佔有很重要的地位，如：燃燒爐的設計、熱儲存系統之相變化物質(phase change material) 的熱傳分析與生醫工程上紅外線診斷的逆算問題等。而在輻射熱傳問題中，其輻射傳輸方程式(radiative transport equation, RTE)是一個積微分方程式，而且輻射強度不僅與位置變數相關且與空間的角度有關，因此其分析顯得相當複雜。甚至，若伴以折射率不為1的Fresnel介面更是難以處理。雖然，以蒙第卡羅法(Monte Carol method) 伴以光線追蹤 (ray tracing)法可以求得其解，但這將耗費相當大的記憶體與CPU時間，而且往往我們在處理混模熱傳時，常希望輻射部分與其它熱傳部分差分式所取的空間格點能一致，避免因內插或外插而導致數值上的誤差。因此，在邊界問題的處理上，早期文獻中，大都假設介面是完全穿透或反射率為常數，考慮介面為

Fresnel反射的研究不多[1]。因此，有的把介面射為散漫反射，其反射率取Fresnel反射角度積分的平均值[2, 3]。將介質折射率列入考慮的文章中，例如，Lin [4]以形式的積分方程式表示一維圓柱介質的輻射熱傳，介質具吸收、放射及等向散射的輻射性質，並以 Galerkin 求得方向放射率 (directional emittance)。而在多維在輻射熱傳的分析中，Crosbie 與 Schrenker [5]，並以積分法 (integral method) 伴以奇異點消除法 (singularity subtraction) 求解輻射傳遞方程式，探討介質受平行入射的問題。Wu 和 Liou [6]以積分法求解雙層平板具Fresnel界面的輻射熱傳。Liu [7]以區塊法 (zonal method) 配合光線追蹤(ray tracing)法，探討無窮長圓柱介質之傳導及輻射的熱傳問題，介質具吸收及放射性質，但不具散射性質，Budenkova 等 [8]以鏡像法 (mirror-image method)成功的求得具Fresnel界面的軸對稱圓柱及圓錐狀介質之求解輻射傳遞方程式解析解，但介質僅具吸收及放射，不具散射性質。

在許多求解輻射傳輸方程式的方法中，離散方向法 (discrete ordinate method, DOM) 是一個非常受歡迎的方法之一，因為它具有下列特色：(1)可實施至任意高階及精準度，(2)計算式(scheme)推導容易，(3)可與對流或擴散的傳輸現象的有限插分法或有限元素法並用。自從 Lathrop[9]開始使用離散方向法，而 Fiveland[10]其應用於三維輻射熱傳之後，DOM 已普遍廣為應用。然而，當輻射強度由邊界入射，入射光線在方向上的不連續變化與反射係數與方向角有關時，這兩因素造成輻射強度在方向角的分布上有強烈的變化，此時以有限的離散方向並不能充分的表示所有方向的輻射強度，而產生光線效應(ray effect)[11]。因此，以 DOM 法處理邊界 Fresnel 反射的問題中，至今仍然很少見。Lacroix [12]與 Lee 及 Viscanta [13]以 DOM 探討二維之傳導及輻射的熱傳問題，介質具吸收及放射性質，但不具散射

性質，邊界為 Fresnel 反射，前者的介質為矩形，後者則為圓柱，在這兩篇論文中，因其所有離散方向組上的光線在經反射後，均會落在原所有的離散方向組上，所以均直接以 DOM 求解。Wu 和 Liou [14, 15]以組合離散法(CDOM)，成功的消除了因 Fresnel 反射的邊界條件不連續所造成的光線效應，前者以 $r-z$ 卡氏座標為主的二維圓柱，後者為多層平板間的 Fresnel 界面。但是，在真正多維的問題中，例如，圓柱側邊側邊具 Fresnel 反射，此時入射的方向與反射的方向均會隨位置的變化而改變，並且與散射部分所採取的離散方向座標不在一致，且隨著多次的反射，分區的臨界角度即隨反射位置變化而改變，此時上述文章的方法即不再適用。最近，Rukoline 等[16]以 DOM 配合特徵法(characteristic method)求解具 Fresnel 反射的軸對稱不規則邊界之輻射熱傳問題，介質且吸收、放射及散射，但其結果並不十分準確。

在本文中，我們假設輻射性質與邊界上的輻射入射光線不隨軸向位置(axial position)變化；而消散係數、散射係數與展開的相函數之係數可隨徑向與水平角度的變化而變化，邊界的入射也可沿圓周變化，光線的折射遵循 Snell 定律。因此本文所考慮的問題為二維非軸對稱的輻射熱傳。在此，我們也是以修正的離散方向法來求解輻射傳輸方程式，將無因次的輻射強度 I 分解成平行入射部分 I^c 和散射部分 I^d ，藉由求出 I^c 的近似解來降低因入射光線方向上不連續產生的光線效應。在以 $r-\psi$ 為主的圓柱座標中，光線由側邊入射，導致每次反射點位置與反射的方向均會變化，且反射次數越多，方向變化越複雜，欲求出所有反射方向幾乎是不可能的。因此，為了簡化問題，我們利用忽略經由 (1)多次反射而造成反射係數乘積很小與(2)輻射強度因多

次反射而造成光線所走過的光學路徑太長，而導致因輻射強度在介質中消散的結果而變得很小，使得其對 I^c 部分的貢獻微乎其微。在忽略上述兩者因素之後，我們考慮入射光線每次反射時，其入射角與反射角角度不變，反射點位置與反射方向必定旋轉($\pi - 2 \times$ 反射角)的幾何關係，求出其所剩餘的不可忽略的部分，所有經有限次數反射的光線對 I^c 部分的貢獻，如此得到 I^c 的近似解，並藉由此方法求得輻射傳輸方程式中，平行入射部分所產生的源函數 S^c ，以擴展至介質具散射性質的輻射熱傳問題，進而求得二維非軸對稱具 Fresnel 邊界之輻射熱傳問題之解。

基本假設及方程式

在本文中我們考慮具有吸收、放射與散射性質的圓柱形介質，受平行光由側邊垂直入射的輻射熱傳，邊界為鏡射反射，介質假設為灰體。介質的相函數以賴建德多項式 (Legendre polynomials) 展開。我們假設輻射性質與邊界上的輻射入射光線不隨軸向位置 (axial position) 變化；而消散係數、散射係數與展開的相函數之係數可隨徑向與水平角度的變化而變化，邊界的入射也可沿圓周變化。因此本文所考慮的問題為二維非軸對稱的輻射熱傳。輻射場中的位置向量以 (r, ψ) 表示， r 為無因次徑向變數，其定義為幾何徑向變數除以半徑 r_0 ； ψ 為水平角度。輻射強度的方向以 (ψ_x, θ) 表示，參考圖一所示，因 ψ_x 為相對於空間的固定座標，因此相同的 (ψ_x, θ) 表示相同的方向 [17]。

本文無因次表示的輻射傳輸方程式，可以下列統御方程式表示：

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} I(r, \psi, \psi_x, \xi) + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} I(r, \psi, \psi_x, \xi) + \beta(r, \psi) I(r, \psi, \psi_x, \xi) = S(r, \psi, \psi_x, \xi), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \psi_x < 2\pi \quad (1)$$

其中， μ 為方向餘弦，其定義為 $\mu = \sin \theta \cos(\psi_x - \psi)$ ， I 為無因次的輻射強度，其定義為輻射強度除以在 $(1, \pi/2)$ 入射的

輻射強度； ξ 為方向餘弦，其定義為 $\xi = \cos \theta$ ； η 為方向餘弦，其定義為 $\eta = \sin \theta \sin(\psi_x - \psi)$ ； β 為無因次消散係數，其定義為消散係數除以半徑 r_0 ；源函數以下列式子表示：

$$S(r, \psi, \psi_x, \xi) = \beta(r, \psi) \left\{ [1 - \omega(r, \psi)] I_b(r, \psi) + \frac{\omega(r, \psi)}{4\pi} \int_{\psi'_x=0}^{2\pi} \int_{\xi'=-1}^1 I(r, \psi, \psi'_x, \xi') \times \Phi(r, \psi, \psi_x, \xi, \psi'_x, \xi') d\xi' d\psi'_x \right\} \quad (2)$$

其中， ω 為散射比，其定義為散射係數除以消散係數； Φ 為相函數，定義如下：

$$\Phi(r, \psi, \psi_x, \xi, \psi'_x, \xi') = \sum_{l=0}^L a_l(r, \psi) P_l(\nu), \quad (3)$$

在此， L 表示維非等向散射的階數； a_l 為展開的係數， $a_0 = 1$ ， P_l 為第 l 階的賴建德多項式；而表方向餘弦的內積 $\nu = \mu\mu' + \eta\eta' + \xi\xi'$ 。

無因次邊界條件，表示如下：

$$I(1, \psi, \psi_x, \xi) = n_{10}^2 [1 - \rho_{01}(\mu_{01})] I_0 \delta(\psi_x - \psi_{10}^*) \delta(\xi) [1 - U(\psi - \psi_{10}^*)] + \rho_{10}(\mu_{10}) I(1, \psi, \psi_x^r, \xi), \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \pi/2 \leq (\psi_x - \psi) \leq 3\pi/2, \quad (4)$$

其中，下標 0 代表環境，下標 1 代表介質， n 為折射率， n_{10} 為介質相對於環境的折射率，定義為 $n_{10} = n_1/n_0$ ； ψ_{10}^* 表示在點 $(1, \psi)$ 的入射光線經折射後方向； \mathcal{G}_{10} 表示光線由介質中的反射角，遵循 Snell 法則， $\sin(\mathcal{G}_{10}) = n_{10} \sin(\mathcal{G}_{01})$ ； $\mu_{10} = \cos(\mathcal{G}_{10})$ ； ψ_x^r 表示為由介質內部投射至邊界的光線之方向的方位角； I_0 為常數輻射強度，入射方向為 $(3\pi/2, 0)$ ，分佈於邊界 0 至 π 的範圍， δ 是 Dirac delta 函數而 U 為步階函數 (unit step function)， ρ_{01} 為由外界至介質的反射率， ρ_{10} 則為介質至外界的反射率，對非傳導性 (dielectric) 材料， ρ_{10} 可表示為

$$\rho_{10}(\mu) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\sqrt{1-n_{10}^2(1-\mu^2)}-n_{10}\mu}{\sqrt{1-n_{10}^2(1-\mu^2)}+n_{10}\mu} \right]^2 + \left[\frac{n_{10}\sqrt{1-n_{10}^2(1-\mu^2)}-\mu}{n_{10}\sqrt{1-n_{10}^2(1-\mu^2)}+\mu} \right]^2 \right\}, \quad \mu > \mu_{10}^c \quad (5a)$$

$$\rho_{10}(\mu) = 1, \quad \mu < \mu_{10}^c, \quad (5b)$$

其中, $\mu = \cos \vartheta$, 當 $n_{10} > 1$ 時, 則 $\mu_{10}^c = \sqrt{1-1/n_{10}^2}$, 否則 $\mu_{10}^c = 0$ 。

輻射傳遞方程式以傳統的修正離散方向法(modified discrete ordinate Method) [5]求解正算的輻射傳遞方程式時, 將無因次的輻射強度 I 分解成平行入射部分 I^c 和散射部分 I^d 。此時 I^c 輻射傳遞方程式邊界條件可表示如下:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} I^c(r, \psi, \psi_x, \xi) + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} I^c(r, \psi, \psi_x, \xi) + \beta(r, \psi) I^c(r, \psi, \psi_x, \xi) = 0$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \psi_x < 2\pi \quad (6)$$

邊界條件:

$$I^c(1, \psi, \psi_x, \xi) = n_{10}^2 (1 - \rho_{01}(\mu_{01})) I_0 \delta(\psi_x - \psi_{10}^*) \times \delta(\xi) [1 - U(\psi - \pi)] + \rho(\mu_{10}) I^c(1, \psi, \psi_x^r, \xi)$$

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \pi/2 \leq (\psi_x - \psi) \leq 3\pi/2 \quad (7)$$

同時, I^d 輻射傳遞方程式邊界條件可表示如下:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} I^d(r, \psi, \psi_x, \xi) + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} I^d(r, \psi, \psi_x, \xi) + \beta(r, \psi) I^d(r, \psi, \psi_x, \xi) = S^d(r, \psi, \psi_x, \xi) + S^c(r, \psi, \psi_x, \xi)$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \psi_x < 2\pi \quad (8)$$

邊界條件:

$$I^d(1, \psi, \psi_x, \xi) = \rho(\mu_{10}) I^d(1, \psi, \psi_x^r, \xi)$$

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \pi/2 \leq (\psi_x - \psi) \leq 3\pi/2 \quad (9)$$

其中, S^d 定義與(2)式完全一樣, 除了將 I 改成 I^d ; S^c 表示如下:

$$S^c(r, \psi, \psi_x, \xi) = \beta(r, \psi) \times \frac{\omega(r, \psi)}{4\pi} \int_{\psi_x'=0}^{2\pi} \int_{\xi'=-1}^1 I^c(r, \psi, \psi_x', \xi') \times \Phi(r, \psi, \psi_x, \xi, \psi_x', \xi') d\xi' d\psi' \quad (10)$$

求解方程式(5)與(6)時, 首先考慮點 $M(1, \psi^M)$, 如圖二所示。由邊界平行入射的分量 I^c 至點 $M(1, \psi^M)$, 可分為(1)若點位於上半圓且考慮的方向與入射光線經折射後的方向一致, 也就是 $\psi_x^M = \psi_{10}^*$ 。否則, 光線由邊界直接入射穿透點 $M(1, \psi^M)$ 的分量為零; (2)由邊界折射進入介質, 經過一~多次反射而至點 $M(1, \psi^M)$ 所有可能的點所貢獻的分量和。此時, 原始入射點 $(1, \psi^1)$ 方向上滿足 $\psi_x^1 = \psi_{10}^*$ 。原始入射點有可能非單一個, 例如, 當入射光線經折射後所有反射光線軌跡形成一正多邊形時, 則光線會依這多邊形行進, 不停反射至點 $M(1, \psi^M)$, 形成多次貢獻。在點 $M(1, \psi^M)$ 的 I^c 的形式解表示如下:

$$I^c(1, \psi^M, \psi_x^M, 0) = n_{10}^2 [1 - \rho_{01}(\mu_{01})] I_0 \delta(\psi_x^M - \psi_{10}^*) [1 - U(\psi^M - \pi)] + \sum_{j=1}^J \left\{ n_{10}^2 [1 - \rho_{01}(\mu_{01})] I_0 \times \delta(\psi_x^j - \psi_{10}^*) [1 - U(\psi^j - \pi)] \prod_{k=1}^K \rho(\mu_{10}) \exp \left[- \int_{M_{k-1}}^{M_k} \beta(s') ds' \right] \right\}_j \quad (11)$$

其中, ϑ_{01} 為光線在介質外的反射角, ϑ_{10} 為光線在介質內的反射角, 與光線穿過邊界經折射後之折射角相同, 滿足 Snell 定律:

$$\begin{cases} \vartheta_{01} = (\psi^k + \pi - 3\pi/2) \\ \sin(\vartheta_{10}) = n_{10} \sin(\vartheta_{01}) \end{cases} \quad (12)$$

如圖二所示, k 代表入射點 $M_k(1, \psi^k)$ 到點 $M(1, \psi^M)$ 的反射次數; s' 定義為 $s' = |\vec{r}_{M_{k-1}} - \vec{r}_{M_k}|$ 。等式右邊第一項代表入射光線穿透邊界的貢獻, 第二項代表所有入射點之光線經 0~ K 次反射的貢獻。

在本文中我們採取光線追蹤法(ray tracing technique) 來計算平行入射的分量 I^c 。在考慮平行入射的問題中, 若邊界為鏡像反射, 則光

線在介質中的反射可為無窮多次的。譬如，當我們考慮一固定點，不論位於邊界上或介質中，欲求得經多次反射而至此固定點的所有方向是無窮多的，也因此欲求得方程式(11)的解幾乎是不可能。因此，我們將其簡化，僅將經多次反射而至此固定點的某些方向的光線列入考慮，而這些方向的光線必須會其對結果造成顯著的影響。本文考慮了滿足下列條件的入射光線：(1) 入射光線經多次反射到此考慮中的點，其反射次數有限，不會使得反射率的乘積太小；(2)入射光線經多次反射到此考慮中的點所走的總光學長度有限。此兩因素滿足方程式(11)中的 $\prod_{k=1}^{K-1} \rho \exp\left(-\int_{M_k}^{K+1} \beta ds'\right)$ 項大於 10^{-5}

時，不可忽略。在前者的部分我們可以由幾何上的關係求出，即入射點位置與點 $M(1, \psi^M)$ 位置一樣，光線經折射後即為(11)式的第一項；在後者的部份中，必須(1)滿足位置入射點位置 $(1, \psi^k)$ 經旋轉後與 $M(1, \psi^M)$ 重合；(2)從外界必須有光線進入，且進入之光線經折射後的折射角與 ψ_x^{*k} 及 u_x^{*M} 所定義角度相等。我們以下列方程式表使其條件：

當 $\vartheta_{10} > 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k + k(\pi - 2\vartheta_{10}) - 2n\pi &= \psi^M & (13a) \\ \vartheta_{10} = \psi_x^{*k} = u_x^{*M} & & (13b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k - k(\pi + 2\vartheta_{10}) + 2n\pi &= \psi^M & (14a) \\ \vartheta_{10} = \psi_x^{*k} = u_x^{*M} & & (14b) \end{aligned} \right.$$

當 $\vartheta_{10} < 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k + k(\pi - 2\vartheta_{10}) - 2n\pi &= \psi^M & (13a) \\ \vartheta_{10} = \psi_x^{*k} = u_x^{*M} & & (13b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k - k(\pi + 2\vartheta_{10}) + 2n\pi &= \psi^M & (14a) \\ \vartheta_{10} = \psi_x^{*k} = u_x^{*M} & & (14b) \end{aligned} \right.$$

其中， u_x^{*M} 表示在點 $M(1, \psi^M)$ 上的方向的水平角逆轉 π 與位置水平角的夾角， $u_x^{*M} = (u_x - \pi) - \psi^M$ ，同理， $\psi_x^{*k} = (\psi_x^k - \pi) - \psi^M$ 方程式(12a)及(13a)為入射光線每反射一次，入射點與反射點的位置即相差 $(\pi \mp \vartheta_{10})$ ，若反射 k 次即相差 $k(\pi \mp \vartheta_{10})$ ，而 $2n\pi$ 為調整方程式(13a)及(14a)的等式左側 $\psi^k \pm k(\pi - \vartheta_{10})$ 項，使其值介於 $0 \sim 2\pi$ 之間。在求解 ψ^k 時，我們將(12)式代入 13(a)與 14(a)，推得：

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k &= \psi^M - \left\{ k \left[\pi - 2n_{10} \sin(\psi^k + \pi - 3\pi/2) \right] + 2n\pi \right\} \\ \psi^k &= \psi^M + \left\{ k \left[\pi + 2n_{10} \sin(\psi^k + \pi - 3\pi/2) \right] - 2n\pi \right\} \end{aligned} \right.$$

(15)

(16)

由(15)、(16)式中，當我們給定某一個整數值 k ，則在已知的 ψ^M 條件下，可求得相對應的入射點之位置 $(1, \psi^k)$ 。理論上 k 值無限多個，但加上上述的兩個條件限制之後，我們僅需求出影響較大的有限個 k 值 ($k=1 \dots K$)，並代入(13b)及(14b)將其對應的入射方向求出，代入(11)式，求得 I^c 。同理，在求得方程式(10)中的 $S_c(r, \psi, \psi_x, \xi)$ 項之方法也類似。如圖二所示，考慮介質中的一點 $N(r, \psi^N)$ ，由幾何關係可以推得

當 $\vartheta_{10} > 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k + k(\pi - 2\vartheta_{10}) - 2n\pi - (\pi - \vartheta_{10} - \vartheta_2) &= \psi^M \\ \vartheta_{10} = \psi_x^{*k} = \sin^{-1}[r(\sin \vartheta_2)] & \end{aligned} \right.$$

(17a)

(17b)

當 $\vartheta_{10} < 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi^k - k(\pi + 2\vartheta_{10}) + 2n\pi - (\pi - \vartheta_{10} - \vartheta_2) &= \psi^M \\ \vartheta_{10} = \psi_x^{*k} = \sin^{-1}[r(\sin \vartheta_2)] & \end{aligned} \right.$$

(18a)

(18b)

ϑ_2 為由邊界反射而來之光線的方向與點 $N(r, \psi^N)$ 的銳角夾角。同理，將方程式由方程式(17b)、(18b)與(17a)、(18a)，對於某一個給定整數值 k ，在已知的 (r, ψ^N) 條件下，可求得相對應的入射點之位置 $(1, \psi^k)$ ；如此求出所有有限數目的入射點 $(1, \psi^k)$ 及 I^c ，再代入方程式(10)中，即可求得 S_c ：

$$S_c(r, \psi^N, \psi_x^N, \xi^N) = \beta(r, \psi^N) \times \frac{\omega(r, \psi^N)}{4\pi} \sum_{k_1=1}^{K_N} I^c(r, \psi^N, \psi_x^{k_1}, \xi^{k_1}) \times \Phi(r, \psi^N, \psi_x^N, \xi^N, \psi^{k_1}, \psi_x^{k_1}, \xi^{k_1}) \quad (19)$$

接著，我們以離散方向法，參考[17]，解方程式(8)及(9)，求得 I^d 。然後，將 I^d 與 I^c 相加，代入下列方程式(20)、(21)及(22)中求得全角度積分強度 G 、徑向輻射熱通量 q^r 及切線方向輻射熱通量 q^ψ 。 G 、 q^r 與 q^ψ 可以分別表示如下：

$$G(r, \psi) = \int_{\psi_x=0}^{2\pi} \int_{\xi=-1}^1 I^d(r, \psi, \psi_x, \xi) d\psi_x d\xi + \sum_{n=1}^N I^c(r, \psi, \psi_x^n, \xi) \quad (20)$$

$$q^r(r, \psi) = \int_{\psi_x=0}^{2\pi} \int_{\xi=-1}^1 I^d(r, \psi, \psi_x, \xi) \mu d\psi_x d\xi + \sum_{n=1}^N I^c(r, \psi, \psi_x^n, \xi) \mu^n \quad (21)$$

$$q^t(r, \psi) = \int_{\psi_x=0}^{2\pi} \int_{\xi=-1}^1 I^d(r, \psi, \psi_x, \xi) \eta d\psi_x d\xi + \sum_{n=1}^N I^c(r, \psi, \psi_x^n, \xi) \eta^n \quad (22)$$

總括本章求解輻射傳輸方程式及邊界上的輻射熱通量 q^r 如下：

1. 將無因次輻射強度 I 分解成散射部分 I^d 與平行入射部分 I^c ；
2. 在(i)有限的反射次數與(ii)入射光線經多次反射所走的總光學路徑長度有限長的兩個條件下，使得 $\prod_{k=1}^{K-1} \rho \exp\left(-\int_{M_k}^{K+1} \beta ds'\right) > 10^{-5}$ ，求得最大有效反射次數 K ；
3. 解方程式(15)及(16)，並代入並代入(13b)及(14b)將其對應的入射方向求出，再代入(11)式，求得 I^c 近似解，
4. 解方程式(17b)、(18b)與(17a)、(18a) 求出所有入射點 $(1, \psi^k)$ 及 I^c 並將其代入方程式(10)中，求得 S^c ；
5. 以離散方向法解方程式(8)與(9)，求得 I^d ；
6. 將 I^d 與 I^c 代入方程式(20)、(21)及(22)中，求得全角度積分強度 G 、徑向輻射熱通量 q^r 及切線方向輻射熱通量 q^t 。

結果與討論

因篇幅所限，在此我們僅討論徑向輻射熱通量與相關參數的關係。首先，討論在等向散射，固定光學半徑 ($\tau_r = 1.0$)、固定散射比之下 ($\omega = 0.5$)，折射率 n 對下半圓 ($\psi = \pi \sim 2\pi$) 徑向輻射熱通量的影響。由圖三顯示，當折射率愈大，徑向輻射熱通量呈現高度集中於 $\psi = 3/2\pi$ 附近，且當折射率愈大，代表離開介質之徑向輻射熱通量卻愈少，這是因為高折射率時，只要超過 Snell's

Law 的臨界角，即成全反射，熱量不易散失至外界。

接著討論在等向散射 ($a=0$)，光學半徑 ($\tau_r = 1.0$) 及折射率 ($n=1.5$) 均為常數之下，不同散射比對下半圓 ($\psi = \pi \sim 2\pi$) 徑向輻射熱通量的影響。由圖四所顯示，隨著散射比增加，離開介質的徑向輻射熱通量卻隨之下降，而曲線的分布趨勢與圖一類似，顯示散射比僅影響介質中能量的再分布，而對輻射熱通量離開介質相對分布的情形影響較小。比較圖三與圖四，徑向輻射熱通量之分布曲線的樣式，由相對折射率所影響較大。在此相對折射率扮演著類似過濾器的角色，限制能量隨著角度的分布。

圖五，顯示在等向散射 ($a=0$)、相對折射率 ($n=1.5$) 及散射比 ($\omega = 0.5$) 均為常數之下，不同的光學半徑在不同的之下徑向輻射熱通量的分布情形。顯然的，在光學半徑愈小時，輻射熱通量的分布更顯集中，這是因為由上半圓入射的能量經折射後較能深入介質的下半圓。

圖六，顯示在光學半徑 ($\tau_r = 1.0$)、散射比 ($\omega = 0.5$) 及相對折射率 (相對折射率 $n=1.5$) 均為常數之下，三種不同非等向散射之下徑向輻射熱通量的分布情形。如圖所示，在前向散射時，徑向輻射熱通量較後向的值小，這是能量藉由反射與前向散射之故而留於介質之中。

參考文獻

1. Reguigui N.M. and Dougherty R.L., Two-dimensional radiative transfer in a cylindrical layered medium with reflecting interfaces, J. Thermophys. Heat Transfer, 6(1993), 232-241.
2. Siegel R. and Spuckler C.M., Refractive index effects on radiation in an absorbing, emitting and scattering laminated layer, ASME J. Heat Transfer, 115(1993), 194-200.
3. Siegel R. and Spuckler C.M., Variable refractive index effects on radiation in semitransparent scattering multilayered regions, J. Thermophys. Heat Transfer, 7(1993), 624-630.

4. Lin J.D. and Huang J.M., Radiative Transfer within a cylindrical Geometry with Fresnel reflecting boundary, *J. Thermophys.* 2(1988), 118 -122
5. Crosbie A.L, Schrenker R.G., Multiple scattering in a two-dimensional medium exposed to collimated radiation, *JQSRT*, 33(1983), 101 – 25.
6. Wu C.Y., Liou B.T., Radiative transfer in a two-layer slab with Fresnel interfaces. *JQSRT* 56(91996), 573-589.
7. Liu L.H., Transient coupled radiation-conduction in infinite semitransparent cylinders, *JQSRT* 74 (2002), 97-114.
8. Budenkova O.N., Vasilyev M.G., Rukolaine S.A. and Yuferev V.S., Radiative heat transfer in axisymmetric domains of complex shape with Fresnel boundaries, *JQSRT*, 84(2004), 451-463.
9. Carlson B.G. and Lathrop K.D., Transport theory—the method of discrete-ordinates. In: Greespan H, Kelber C. and Okrent D.(Ed.), *Computing methods in reactor physics*, Gordon & Breach, NewYork, 1968, 171-266.
10. Fiveland W.A., Discrete-ordinates solution of the radiative transport equation for rectangular enclosures, *J. Heat Transfer*, 106(1984), 699-706.
11. Coelho P.J., The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified discrete ordinates methods, *JQSRT*, 73(2002), 231-238.
12. Lacroix D, Parent G, Asllanaj F, Jeandel G. Coupled radiative and conductive heat transfer in a non-grey absorbing and emitting semitransparent media under collimated radiation. *JQSRT* 75(2002), 589 – 609.
13. Lee K.H. and Viskanta R. Prediction of spectral radiative transfer in a condensed cylindrical medium using discrete ordinates method. *JQSRT* 58(1997), 329-345.
14. Wu C.Y.and Liou B.T., Discrete ordinate solutions for radiative transfer in a cylindrical enclosure with Fresnel boundaries, *I. J. Heat and Mass Transfer* 40(1997), 2467-2475.
15. Liou B-T and Wu C-Y. Radiative transfer in a multi-layer medium with Fresnel interfaces. *Heat Mass Transfer* 32(1996), 103-107.
16. Rukolaine S.A., Vasilyev M.G., Yuferev V.S. and Mamedov V.M., A numerical scheme for the solution of axisymmetric radiative transfer problems in irregular domains filled by media with opaque and transparent diffuse and specular boundaries, *JQSRT*, 84(2004), 371-382.
17. Hsu S.C., Wu C.Y. and Ou N.R., Azimuthally dependent radiative transfer in an nonhomogeneous cylindrical medium, *Radiation Physics and Chemistry* 53 (1998), 107-113

Abstract

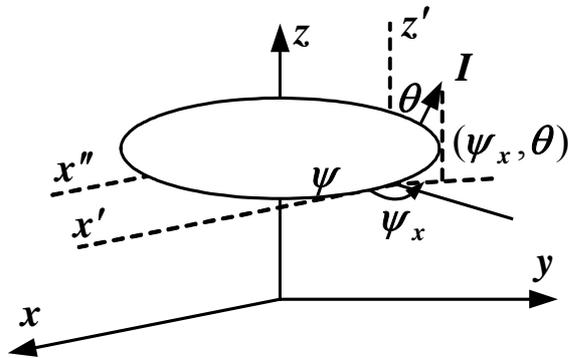
Radiative transport equation (RTE) is an integral-differential equation. Radiative intensity is a function of not only position variables (r, ψ) but also direction angular variables (ψ_x, θ) . Hence, the analysis of radiative heat transfer is quite complicated. Moreover, complexity is reinforced with Fresnel boundary being considered.

Among the methods of solving RTE, discrete ordinate method (DOM) is one of the most popular. The reasons rely on the following factors: (1) easily implement with high order approximation and accuracy, (2) the derivation of DOM schemes is relatively simple, (3) the DOM is compatible with finite-difference or finite-element schemes for convective-diffuse transport phenomena. However, DOM suffers from the ray effects that arise from the approximation of angular distribution of radiation by a set of discrete ordinates.

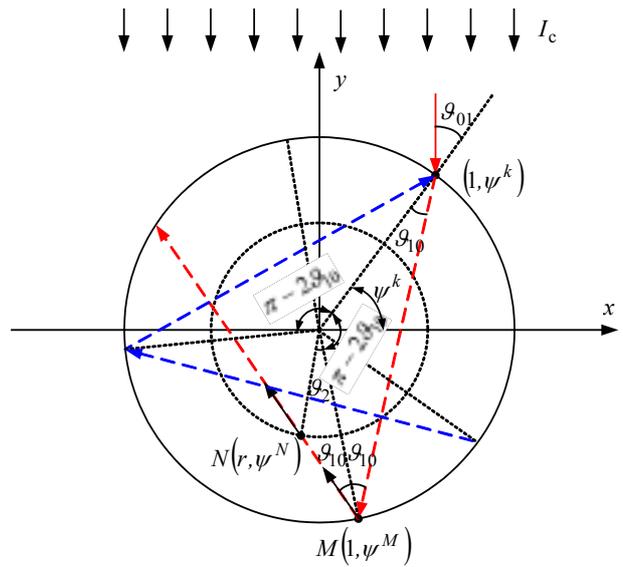
In the present work, we consider two-dimensional azimuthally dependent problem in that medium is scattering and bounded by Fresnel boundary. The incident radiation is collimated and the refraction obeys the Snell's Law. We solve the RTE by modified DOM that split the non-dimensionless radiation intensity into collimated part I^c and diffuse part I^d . By obtaining the approximated collimated part I^c , we can reduce the ray effect

resulted from the angular discontinuity of direction by incident beams. In the $r-\psi$ based cylindrical coordinate, beams incident on the periphery result in the changing of reflection points and direction after every reflection. More reflections make the direction of reflection more complicated. It is hardly impossible to gain all the incident beams contributed to collimated part I^c . Hence, we simplify the problem and acquire the approximated solution of collimated part I^c by neglecting the following two factors owing to too many times of reflection: (1) the product of reflectivity is too small, (2) the optical path is too long results in little contribution to I^c by extinction along the path. We calculate the incident radiation beams under finite times of reflection that can not be neglected and contribute to collimated part I^c . By the same way, we acquire the source function S^c resulted from collimated part I^c . By this doing, we solve the RTE for scattering medium with Fresnel boundary.

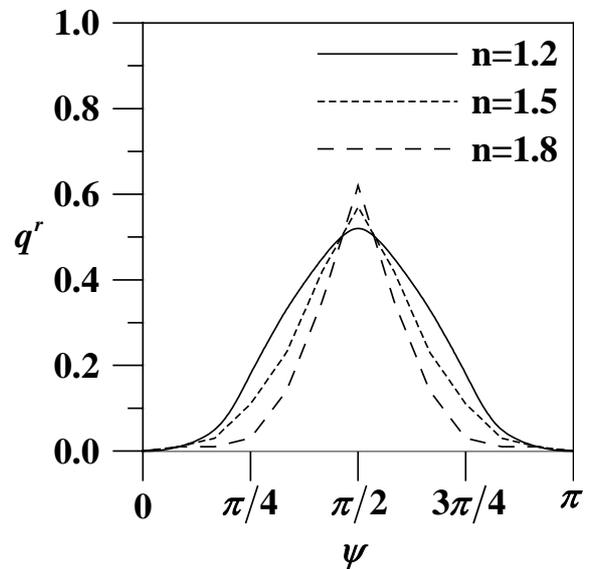
Keywords: Fresnel boundary, Snell's Law, discrete ordinate method (DOM),



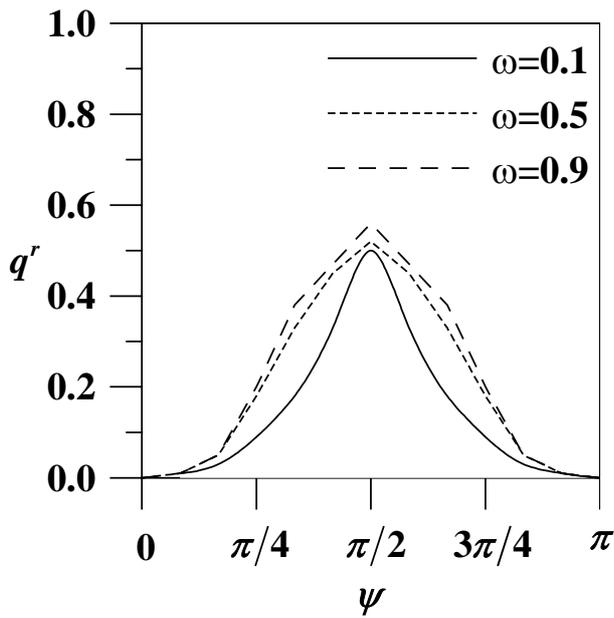
圖(一) 幾何座標圖



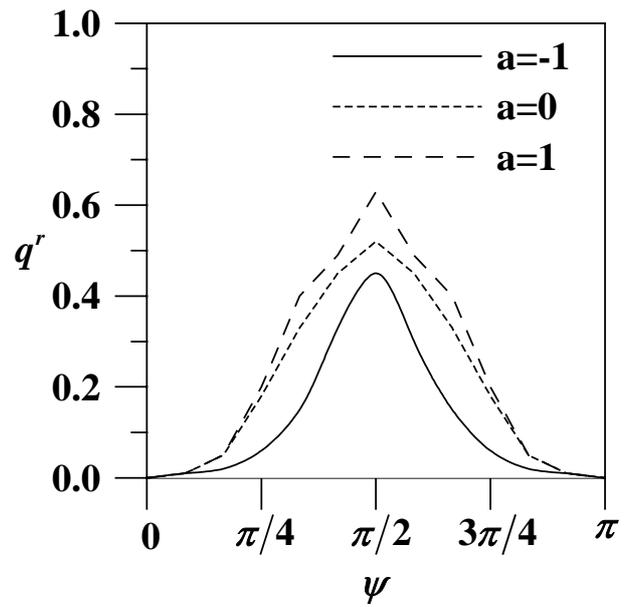
圖二 光線於介質中行進之物理模式圖



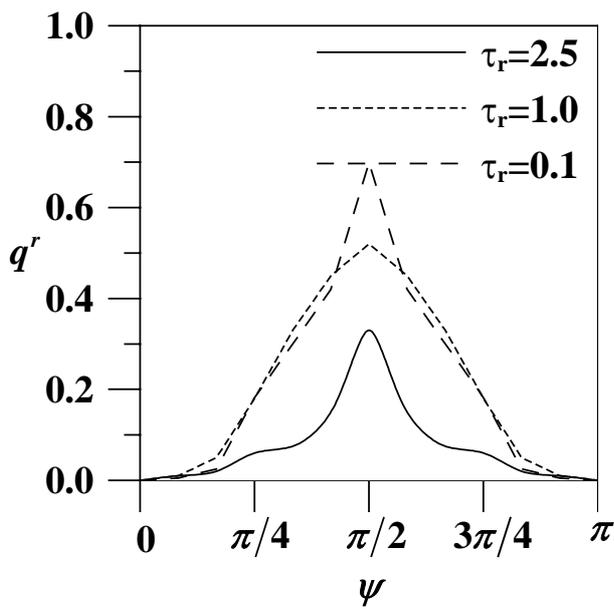
圖三 不同折射率對於徑向輻射熱通量之影響



圖四 不同散射比對於徑向輻射熱通量之影響



圖六 不同相函數對於徑向輻射熱通量之影響



圖五 不同光學半徑對於徑向輻射熱通量之影響