

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

沿垂直方向移動之直立圓柱表面流下的黏彈性流體薄膜流  
的非線性穩定性分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-164-001-

執行期間：94年01月01日至94年07月31日

執行單位：修平技術學院機械工程系

計畫主持人：宋鴻明

計畫參與人員：徐清芳

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 17 日

# 沿垂直方向移動之直立圓柱表面流下的黏彈性流體薄膜 流的非線性穩定性分析

計畫編號：NSC 94-2212-E-164 -001

執行期限：94 年 1 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

主持人：宋鴻明 修平技術學院機械系

計畫參與人員：徐清芳 中原大學機械系研究生

## 摘要

本計畫針對黏彈性流體薄膜流，探討沿垂直方向移動的直立圓柱表面流下的薄膜流之弱非線性液動穩定性問題，並分析圓柱以等速旋轉的情況下，對流場穩定性的影響。首先使用長波微擾法推導薄膜的自由面方程式，在探討薄膜流場的穩定性問題上，主要分析圓柱的移動及旋轉效應對系統穩定性的影響。在液膜弱非線性穩定性分析上，以時間和空間之多重尺度展開法推導得 Ginzburg-Landau 方程式，定出超臨界爆炸、超臨界穩定、亞臨界不穩定及無條件穩定等狀態，並分析亞臨界不穩定區域之臨界振幅值及超臨界穩定波之平衡振幅及波速。藉此探討非線性效應對流場穩定性的影響。

關鍵字：薄膜流，長波微擾法，多重尺度法

## Abstract

This project presents a stability analysis of thin viscoelastic liquid films flowing down a cylinder moving in a vertical direction. The purpose of this project is also to discuss the effect of rotating parameter on the stability of the flow system. The long-wave perturbation method is employed to derive the generalized nonlinear kinematic equations for a free film interface. The current thin liquid film stability analysis provides a valuable input to

investigations into the influence of the style of motion of the vertical cylinder on the stability behavior of the thin film flow. This study utilizes the multiple scales method and derives the corresponding Ginzburg-Landau equation to characterize the nonlinear behavior of the flow. The subcritical stability, subcritical instability, supercritical stability, and supercritical instability states are obtained from the nonlinear stability analysis.

Keywords: thin film flow, long-wave perturbation, method of multiple scales

## 一、計畫源由與目的

流體沿垂直圓柱表面流下時，液體薄膜的動態穩定性問題，在各項工業應用上，相當的重要。以圓柱材料的表面塗層為例，會因薄膜表面的波動而導致塗層不均勻現象，使物體表面失去光澤或觸感，或因波動幅度過大而導致塗層破裂，使水、濕氣易於侵入，產生鏽蝕、變形等缺陷；又如雷射切削加工過程，工作物表面的液膜流動現象對切割品質的影響；此外，薄膜流的不穩定性亦有其正面的效果，例如在熱交換器中之蒸發器與凝結器工作過程，液體薄膜的不穩定性可增加熱傳的效果。

關於直立圓柱表面上薄膜流的穩定性問題，在實際工業應用上，例如圓柱軸承的作動中，圓柱具有旋轉的運動型態，圓柱的旋轉效應對薄膜流穩定性的影響，在此方面的研究並不多見。另外，在實際工業應用上，如齒輪、軸承和凸輪潤滑液及高分子聚合物等非牛頓系流體，流體的流變現象與牛頓系流體有很大的差異，其流動具有液體的黏滯性和類似固體彈性的特性，屬於黏彈性流體(viscoelastic fluids)。因此，黏彈性流體薄膜流穩定性之特性，在理論發展及實際應用上是非常重要的研究課題。所以，本計畫針對黏彈性流體薄膜流，研究沿垂直方向移動的直立圓柱表面流下的薄膜流之弱非線性液動穩定性問題，並分析圓柱以等速旋轉的情況下，對流場穩定性的影響。

## 二、文獻探討

Lin[1]和Chandrasekhar[2]所發展的線性穩定理論，其所得到的臨界條件僅是判斷流場呈現不穩定狀態的充分條件而已，並無法預測流場是否會達到另一平衡狀態。至於非線性穩定性分析理論的發展，Landau[3]提出Landau方程式，解釋紊流形成的過程。Stuart[4]將流體外形假設成一線性擾動解，代入擾動的能量平衡式中積分，進而導出振幅演展的Landau方程式。Newel等[5]，Segel[6]及Diprima等[7]假設流體受干擾時之最不穩定的模式為一組波包(wave packet)，並藉此觀念導出非線性振幅在空間和時間演展的方程式，即為著名的Ginzburg-Landau方程式。Walters[8]探討黏彈性流體在兩同心圓柱間之流動問題。Gupta [9]以長波微小振幅擾動法，探討二階(second order)黏彈性流體，在直立平板面上薄膜流場之線性穩定性，並推導出有關黏彈性參數與對應其物理邊界條件之Orr-Sommerfeld方程式。研究結果指出此黏彈性流體比牛頓流體較不穩定。Gupta等[10]進一步指出三維流場之擾動比二維流場之擾動更不穩定。Shaqfeh等[11]指

出黏彈性流體在低雷諾數時，流場較不穩定；但在中等雷諾數時，流場較為穩定。Dandapat等[12]研究黏彈性流體沿斜面流動之孤立波問題。Andersson等[13]研究重力作用下之直立平板面上黏彈性液膜流場，結果發現黏彈性流體之薄膜厚度成長較牛頓流體快。Cheng等[14]研究直立平板表面之黏彈性流體薄膜流穩定性問題，結果發現黏彈性流體液膜較牛頓系流體液膜不穩定，且隨流體之黏彈性參數值增加，流場愈不穩定。

## 三、研究方法

### (A) 統御方程式與邊界條件

本計畫研究 Walters B” 黏彈性非牛頓系流體[15]，假設流體之表面張力、黏度及密度等物理參數均為常數，且假設液體薄膜之密度和黏滯性均遠大於氣體，因此可忽略氣體效應。其物理模型及座標系統如圖 1 所示，流場為不可壓縮之三維軸對稱層流等溫流場，採用圓柱座標系統，液體薄膜的氣液交界面位於  $r^* = R^* + h^*(t^*, z^*)$  處，其中  $r^*$  為徑向座標， $z^*$  為縱軸向座標， $t^*$  為時間， $R^*$  為圓柱半徑， $h^*$  為液膜厚度。令  $u^*$  及  $w^*$  分別代表  $r^*$  及  $z^*$  方向之速度分量，則系統之統御方程式及對應之邊界條件如下：

連續方程式：

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (1)$$

$r^*$  方向之動量方程式：

$$\rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} \right) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \tau_{r r^*}^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial \tau_{z r^*}^*}{\partial z^*} - \frac{1}{r^*} \tau_{\theta \theta}^* \quad (2)$$

$z^*$  方向之動量方程式：

$$\rho \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \tau_{r z^*}^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial \tau_{z z^*}^*}{\partial z^*} + \rho g \quad (3)$$

其中  $\rho$  是流體密度， $\tau_{r r^*}^*$ ， $\tau_{z z^*}^*$ ， $\tau_{r z^*}^*$  及  $\tau_{z r^*}^*$  分別表示如下：

$$\tau_{r,r^*} = -p^* + 2\mu_0 \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - 2k_0 \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^* \partial r^*} + u^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} \right. \quad (4)$$

$$\left. + w^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^* \partial z^*} - 2 \left( \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 - \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) \right]$$

$$\tau_{z,z^*} = -p^* + 2\mu_0 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - 2k_0 \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^* \partial z^*} + w^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right. \quad (5)$$

$$\left. + u^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^* \partial z^*} - 2 \left( \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 - \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \left( \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \right]$$

$$\tau_{r,z^*} = \tau_{z,r^*} = \mu_0 \left( \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) - k_0 \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^* \partial z^*} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^* \partial r^*} \right. \quad (6)$$

$$\left. + u^* \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^* \partial z^*} \right) + w^* \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^* \partial z^*} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) - 2 \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - 2 \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*}$$

$$\left. - \left( \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \left( \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta,\theta^*} = -p^* + 2\mu_0 \frac{u^*}{r^*} - 2k_0 \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right. \quad (7)$$

$$\left. - \frac{u^{*2}}{r^{*2}} + \frac{w^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)$$

邊界條件如下：

在圓柱面上 ( $r^* = R^*$ )：

$$u^* = 0 \quad , \quad w^* = V_w^* \quad (8)$$

其中  $V_w^*$  為直立圓柱沿垂直方向移動之速度。

在薄膜自由面邊界上 ( $r^* = R^* + h^*$ )：

$$\frac{\partial h^*}{\partial z^*} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{-1} (\tau_{r,r^*} - \tau_{z,z^*}) \quad (9)$$

$$+ \left[ 1 - \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{-1} \tau_{r,z^*} = 0$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{-1} \left[ 2\tau_{r,z^*} \frac{\partial h^*}{\partial z^*} - \tau_{r,r^*} - \tau_{z,z^*} \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$+ S^* \left\{ \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{-3/2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^*} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} = Pa^*$$

其中  $h^*$  為局部薄膜厚度， $Pa^*$  為環境壓力， $S^*$  為表面張力，各變數上標 “\*” 代表有因次物理量。(9)和(10)式分別代表薄膜自由面切線及法線方向之應力平衡狀態。

薄膜自由面運動方程式為：

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial h^*}{\partial z^*} w^* - u^* = 0 \quad (11)$$

引進流線函數  $\varphi^*$ ，其定義如下：

$$u^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z^*}, \quad w^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \varphi^*}{\partial r^*} \quad (12)$$

另定義下列各無因次量：

$$z = \frac{\alpha z^*}{h_0^*}, \quad r = \frac{r^*}{h_0^*}, \quad t = \frac{\alpha u_0^* t^*}{h_0^*}, \quad h = \frac{h^*}{h_0^*},$$

$$\varphi = \frac{\varphi^*}{u_0^* h_0^{*2}}, \quad p = \frac{P^* - P_a^*}{\rho u_0^{*2}}, \quad \text{Re} = \frac{u_0^* h_0^*}{\nu},$$

$$S = \left( \frac{S^{*3}}{2^2 \rho^3 \nu^4 g} \right)^{1/3}, \quad \alpha = \frac{2\pi h_0^*}{\lambda}, \quad R = \frac{R^*}{h_0^*},$$

$$k = \frac{k_0}{\rho h_0^{*2}} \quad (13)$$

其中  $k$  為無因次黏彈性參數， $\text{Re}$  為雷諾數， $\alpha$  為無因次波數， $\lambda$  為擾動波波長， $\nu$  為運動黏滯係數， $u_0^*$  及  $h_0^*$  分別為穩態平衡時，薄膜自由面之局部速度及局部厚度。直立圓柱之移動速度可表示為

$$V_w^* = X \frac{g h_0^*}{4\Gamma} \quad (14)$$

其中  $\Gamma = [2(1+R)^2 \ln(\frac{1+R}{R}) - (1+2R)]^{-1}$  且  $X$  為常數。薄膜自由面之局部速度 ( $u_0^*$ ) 可表示如下：

$$u_0^* = (1+X) \frac{g h_0^{*2}}{4\Gamma} \quad (15)$$

圓周方向之速度為  $v^* = R^* \Omega^*$ ， $\Omega^*$  為圓柱旋轉之角速度。無因次化旋轉數 (rotation number) 定義如下：

$$R_0 = \frac{\Omega^* h_0^*}{u_0^*} \quad (16)$$

## (B) 黏彈性流體薄膜流之長波微擾解

由於具有自由面或不連續交界面上，長波的干擾較短波的干擾不穩定，所以長波的無因次波數 ( $\alpha$ ) 值很小，將  $\varphi$  及  $p$  以  $\alpha$  為微擾參數展開成以下的形式：

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + O(\alpha^2) \quad (17)$$

$$p = p_0 + \alpha p_1 + O(\alpha^2) \quad (18)$$

將以上兩式代入無因次化後之統御方程式及對應之邊界條件後，則可得關於 $\alpha$ 的各階系統方程式，分階求解，最後可求得薄膜自由面運動方程式如下：

$$h_t + A(h)h_z + B(h)h_{zz} + C(h)h_{zzz} + D(h)h_z^2 + E(h)h_z h_{zz} = 0 \quad (19)$$

其中

$$A(h) = \frac{1}{1+X} [2\Gamma(R^2 - q^2 + 2q^2 \ln Q) + X] \quad (20)$$

$$B(h) = \frac{1}{8} \alpha S \text{Re}^{-2/3} (2\Gamma)^{1/3} (1+X)^{-1/3} (4q \ln Q - 3q + \frac{4R^2}{q} - \frac{R^4}{q^3}) + \frac{\alpha \text{Re} \Gamma^2}{(1+X)^2} \left\{ \frac{13}{48} R^6 + \frac{1}{16} R^4 q^2 (-9 + 28 \ln Q) + \frac{1}{48} q^6 [59 - 120 (\ln Q)^2 + 96 (\ln Q)^3] + \frac{1}{16} R^2 q^4 [-15 - 68 \ln Q + 40 (\ln Q)^2] + k \left[ \frac{3}{2} R^4 + 8R^2 q^2 \ln Q - \frac{1}{2} q^4 (3 + 4 \ln Q - 8 (\ln Q)^2) \right] \right\} + \frac{1}{16} \frac{1}{q^2} \text{Re} \alpha R_0^2 R^2 (-3q^4 + 4q^2 R^2 - R^4 + 4q^4 \ln Q) \quad (21)$$

$$C(h) = \frac{1}{8} \alpha^3 S \text{Re}^{-2/3} (2\Gamma)^{1/3} (1+X)^{-1/3} (4R^2 q + 4q^3 \ln Q - 3q^3 - \frac{R^4}{q}) \quad (22)$$

$$D(h) = \frac{1}{4} \alpha S \text{Re}^{-2/3} (2\Gamma)^{1/3} (1+X)^{-1/3} (4 \ln Q + \frac{R^4}{q^4} - 1) + \frac{\alpha \text{Re} \Gamma^2}{(1+X)^2} \left\{ \frac{13}{48} \frac{R^6}{q} + q^5 \left[ \frac{413}{48} - 5 \ln Q - \frac{23}{2} (\ln Q)^2 + 14 (\ln Q)^3 \right] + R^4 q \left( \frac{1}{16} + \frac{21}{4} \ln Q \right) + R^2 q^3 \left[ -\frac{143}{16} - \frac{65}{4} \ln Q + \frac{25}{2} (\ln Q)^2 \right] + k \left[ \frac{3}{2} \frac{R^4}{q} + 8qR^2 (1 + 3 \ln Q) + q^3 \left( -\frac{19}{2} - 2 \ln Q + 20 (\ln Q)^2 \right) \right] \right\} + \frac{1}{16} \frac{1}{q^3} \text{Re} \alpha R_0^2 R^2 (-5q^4 + 4q^2 R^2 + R^4 + 12q^4 \ln Q) \quad (23)$$

$$E(h) = \alpha^3 S \text{Re}^{-2/3} (2\Gamma)^{1/3} (1+X)^{-1/3} (R^2 - q^2 + 2q^2 \ln Q) \quad (24)$$

### (C) 薄膜穩定性分析理論

假設平衡狀態液膜的無因次厚度值為 $1 (h=1)$ ，則非平衡狀態液膜的無因次厚度可表示如下：

$$h(z, t) = 1 + \eta(z, t) \quad (25)$$

其中 $\eta(z, t)$ 是液膜表面的微小擾動量，為時間函數。

在線性液膜穩定性分析方面，利用正模分析法[16]且忽略三次方以上之非線性項，則可得線性的微擾動方程式之解如下：

$$\eta = a \exp[i(z - dt)] + c.c. \quad (26)$$

其中 $a$ 為無因次擾動的振幅， $d = d_r + id_i$ 為複數波速， $c.c.$ 為前一項之共軛複數。複數波速為：

$$d = d_r + id_i = A + i(B - C) \quad (27)$$

其中 $d_r$ 為液膜表面擾動波之線性波速， $d_i$ 為液膜表面擾動波之線性振幅增長率。藉由 $d_i$ 之值可判斷線性系統的狀態，可分為以下三種情況：

- (1)若 $d_i < 0$ ，則系統為線性穩定狀態。
- (2)若 $d_i = 0$ ，則系統為臨界狀態。
- (3)若 $d_i > 0$ ，則系統為線性不穩定狀態。

在非線性液膜穩定性分析方面，採用多重尺度法[17]，最後推導得著名的Ginzburg-Landau方程式如下，可用來研究液膜的非線性行為。

$$\frac{\partial a}{\partial t_2} + D_1 \frac{\partial^2 a}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-2} d_i a + (E_1 + iF_1) a^2 \bar{a} = 0 \quad (28)$$

其中

$$D_1 = B - 6C \quad (29)$$

$$E_1 = (-5B' + 17C' + 4D - 10E)e_r - A'e_i + \left(-\frac{3}{2}B'' + \frac{3}{2}C'' + D' - E'\right) \quad (30)$$

$$F_1 = (-5B' + 17C' + 4D - 10E)e_i + A'e_r + \frac{1}{2}A'' \quad (31)$$

若波與波之間無交互作用，即滿足單一濾波 (monochromatic filtered wave) 的條件，此單一波的振幅滿足以下之方程式：

$$\frac{\partial a}{\partial t_2} - \varepsilon^{-2} d_i a + (E_1 + iF_1) a^2 \bar{a} = 0 \quad (32)$$

假設上式的解為以下的型式：

$$a = a_0(t_2) \exp[-ib_0(t_2)t_2] \quad (33)$$

則可得

$$\frac{\partial a_0}{\partial t_2} = (\varepsilon^{-2} d_i - E_1 a_0^2) a_0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial [b_0(t_2)t_2]}{\partial t_2} = F_1 a_0^2 \quad (35)$$

在線性不穩定區 ( $d_i > 0$ )，若  $E_1 < 0$ ，則為超臨界不穩定狀態；若  $E_1 > 0$ ，則為超臨界穩定狀態，存在週期性的超臨界穩定波，其平衡半振幅  $\varepsilon a_0$  為：

$$\varepsilon a_0 = \sqrt{\frac{d_i}{E_1}} \quad (36)$$

對應超臨界穩定波之波速  $Nc_r$  為：

$$Nc_r = d_r + \varepsilon^2 b_0 = d_r + d_i \left( \frac{F_1}{E_1} \right) \quad (37)$$

線性穩定區 ( $d_i < 0$ )，若  $E_1 > 0$ ，則為亞臨界穩定狀態；若  $E_1 < 0$ ，則系統存在亞臨界不穩定性；若外界擾動量超過某一臨界值  $2\varepsilon a_0$ ，則系統呈不穩定狀態。

#### 四、結果與討論

本計畫主要探討沿垂直方向移動的直立圓柱表面流下的黏彈性流體薄膜流之弱非線性液動穩定性問題，並分析圓柱以等速旋轉的情況下，對流場穩定性的影響。根據分析結果，影響黏彈性薄膜流的穩定性參數包括：雷諾數， $Re$ ；無因次擾動波數， $\alpha$ ；直立圓柱移動速度參數， $X$ ；旋轉數， $R_0$ 。本文所使用之物理參數如下：(1)無因次表面張力為 6173.5；(2)雷諾數範圍從 0 至 10；(3)

無因次擾動波數範圍從 0 至 0.12；(4)無因次黏彈性參數為 0.05；(5)直立圓柱移動速度參數， $X$ ，為 -0.09, 0, 及 0.12；(6)無因次圓柱半徑， $R$ ，為 20；(7)旋轉數， $R_0$ ，為 0, 0.05, 0.1。其中直立圓柱移動速度參數， $X$ ，與直立圓柱在垂直方向不同的移動速度之相對關係如表 1 所示。

由線性穩定性分析理論可得到中立穩定曲線 ( $d_i = 0$ )，此曲線將  $\alpha - Re$  平面分成兩個區域，一是線性穩定區 ( $d_i < 0$ )，在此區域微小擾動會隨時間之增加而衰減；另一是線性不穩定區 ( $d_i > 0$ )，在此區域微小擾動會隨時間之增加而增長。當擾動波成長至有限波幅時，線性理論無法準確且有效的預測薄膜流流場現象，必需考慮非線性效應的影響。由非線性穩定性分析理論來探討在線性穩定區內是否會轉變成不穩定的情況，即亞臨界不穩定區。另針對在線性不穩定區內系統是否會發展成穩定之規則波，即超臨界穩定區。圖 2、圖 3 及圖 4 均顯示黏彈性流體薄膜流系統都具有亞臨界不穩定區 ( $d_i < 0$ ,  $E_1 < 0$ ) 和超臨界穩定區 ( $d_i > 0$ ,  $E_1 > 0$ ) 之存在。比較圖 2 和 3(a)，顯示圓柱往下移動，亞臨界穩定和超臨界穩定區域範圍增大，超臨界不穩定區域範圍減小，亞臨界不穩定區域範圍並沒有明顯的變化。由圖 2 和 3(a) 亦可明顯的看出斜線區域範圍 (包括亞臨界不穩定區及超臨界不穩定區) 隨圓柱往下移動而減小。比較圖 2 和 4(a)，顯示隨圓柱往上移動，亞臨界穩定和超臨界穩定區域範圍減小，超臨界不穩定區域範圍增大，亞臨界不穩定區域範圍並沒有明顯的變化。由圖 2 和 4(a) 亦可明顯的看出斜線區域範圍 (包括亞臨界不穩定區及超臨界不穩定區) 隨圓柱往上移動而增加。比較圖 3(a) 和 3(b) 以及圖 4(a) 和 4(b) 顯示：無論圓柱往上或往下移動時，增加旋轉效應，即隨旋轉數 ( $R_0$ ) 的增加，均會使亞臨界穩定和亞臨界不穩定區域範圍減小，超臨界穩定和超臨界不穩定區域範圍增大。

圖 5 表示在  $R = 20$ ， $R_0 = 0$  及  $\overline{Re} = 5$ ，

不同  $X$  值之條件下，亞臨界不穩定區中的臨界振幅值之變化。圖中顯示隨圓柱往下移動，薄膜流系統的臨界振幅值愈大，流場呈現相對穩定狀態；隨圓柱往上移動，薄膜流系統的臨界振幅值愈小，流場較不穩定。圖 6 表示在  $R=20$  及  $\overline{Re}=5$ ，當圓柱往下移動，不同  $R_0$  值的條件下，亞臨界不穩定區中的臨界振幅值之變化。圖中顯示隨圓柱旋轉速度增加，薄膜流系統的臨界振幅值愈小，流場較不穩定。圖 7 表示在  $R=20$  及  $\overline{Re}=5$ ，當圓柱往上移動，不同  $R_0$  值的條件下，亞臨界不穩定區中的臨界振幅值之變化。圖中顯示隨圓柱旋轉速度增加，薄膜流系統的臨界振幅值愈大，流場呈現相對穩定狀態。

圖 8 表示在  $R=20$ ， $R_0=0$  及  $\overline{Re}=10$ ，不同  $X$  值之條件下，超臨界穩定區中的平衡振幅值之變化。圖中顯示隨圓柱往下移動，薄膜流系統的平衡振幅值愈小，流場呈現相對穩定狀態；隨圓柱往上移動，薄膜流系統的平衡振幅值愈大，流場較不穩定。圖 9 表示在  $R=20$  及  $\overline{Re}=10$ ，當圓柱往下移動，不同  $R_0$  值的條件下，超臨界穩定區中的平衡振幅值之變化。圖中顯示隨圓柱旋轉速度增加，薄膜流系統的平衡振幅值愈大，流場較不穩定。圖 10 表示在  $R=20$  及  $\overline{Re}=10$ ，當圓柱往上移動，不同  $R_0$  值的條件下，超臨界穩定區中的平衡振幅值之變化。圖中顯示隨圓柱旋轉速度增加，薄膜流系統的平衡振幅值愈小，系統呈現較為穩定之狀態。

圖 11 表示在  $R=20$ ， $R_0=0$  及  $\overline{Re}=10$ ，在不同  $X$  值之條件下，超臨界穩定波之非線性波速的變化曲線。圖中顯示隨圓柱往下移動，薄膜流系統的非線性波速愈小，流場呈現相對穩定狀態；相反的，隨圓柱往上移動，薄膜流系統的非線性波速愈大，流場較不穩定。圖 12 表示在  $R=20$  及  $\overline{Re}=10$ ，當圓柱往下移動，不同  $R_0$  值的條件下，超臨界穩定波之非線性波速的變化。圖中顯示隨圓柱旋轉速度增加，薄膜流系統的非線性波速愈大，流場較不穩定。圖 13 表示在  $R=20$  及  $\overline{Re}=10$ ，當圓柱往上移動，不同  $R_0$  值的條件

下，超臨界穩定波之非線性波速的變化。圖中顯示隨圓柱旋轉速度增加，薄膜流系統的非線性波速愈小，流場較為穩定。

由以上討論得知，沿垂直方向移動及等速旋轉之直立圓柱表面流下之黏彈性流體薄膜流系統的穩定性受圓柱的運動型態影響極大。直立圓柱垂直往下移動，系統較穩定，直立圓柱垂直往上移動，系統較不穩定。另外，在增加圓柱旋轉效應的因素下，當直立圓柱垂直往下移動，隨圓柱旋轉速度的增加，系統呈現較不穩定的狀態；當直立圓柱垂直往上移動，隨圓柱旋轉速度的增加，系統較為穩定。

## 五、參考文獻

1. Lin, C. C., The theory of hydrodynamic stability, Cambridge University Press, Cambridge (1955).
2. Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press, Oxford (1961).
3. Landau, L. D., "On the problem of turbulence," *C.R. Acad. Sci., U.R.S.S.*, Vol. 44, pp. 311-314 (1944).
4. Stuart, J. T., "On the role of Reynolds stresses in stability theory," *J. Aero. Sci.*, Vol. 23, pp. 86-88 (1956).
5. Newell, A. C. and Whitehead, J. A., "Finite bandwidth, finite amplitude convection," *J. Fluid Mech.*, Vol. 38, pp. 279-303 (1969).
6. Segel, L. A., "Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection," *J. Fluid Mech.*, Vol. 38, pp. 203-204 (1969).
7. Diprima, R. C. and Stuart, J. T., "The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms," *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 362, pp. 27-41 (1978).
8. Walters, K., "The motion of an elastic-viscous liquid contained between

coaxial cylinders,” *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 13, pp. 444-461 (1960).

9. Gupta, A. S., “Stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 28, pp. 17-28 (1967).
10. Gupta, A. S. and Lajpat, R., “Note on the stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, pp. 87-91 (1968).
11. Shaqfen, E. S. G., Larson, R. G. and Fredrickson, G. H., “The stability of gravity driven viscoelastic film-flow at low to moderate Reynolds number,” *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 31, pp. 87-113 (1989).
12. Dandapat, B. S. and Gupta, A. S., “Solitary waves on the surface of a viscoelastic fluid running down an inclined plane,” *Rheol. Acta*, Vol. 36, pp. 135-143 (1997).
13. Andersson, H. I. and Dahi, E. N., “Gravity-driven flow of a viscoelastic liquid film along a vertical wall,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 32, pp. 1557-1562 (1999).
14. Cheng, P. J., Lai, H. Y. and Chen, C. K., “Stability analysis of thin viscoelastic liquid film flowing down on a vertical wall,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 33, No. 14, pp. 1674-1682 (2000).
15. Walters, K., “The solution of flow problems in the case of materials with memory,” *J. Mec.*, Vol. 1, pp. 479-486 (1962).
16. Drazin, P. G. and Reid, W. H., “Hydrodynamic Stability,” Cambridge University Press, Cambridge (1984).
17. Nayfeh, A. H., *Perturbation method*, Wiley, New York, Chapter 6, pp. 228-309 (1973).

$V_w^*$	$V_w^* = -0.1u_0^*$	$V_w^* = 0$	$V_w^* = 0.1u_0^*$
$X$	-0.09	0	0.12

表1 直立圓柱在垂直方向不同的移動速度所對應之參數( $X$ )值

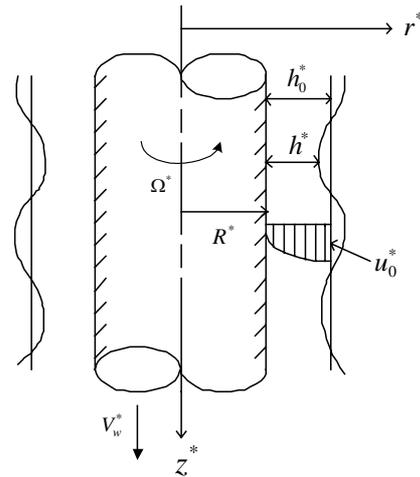


圖1 沿垂直方向移動及旋轉之直立圓柱表面流下的薄膜流系統

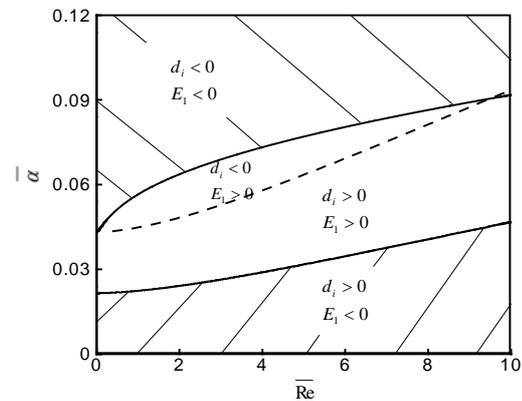


圖2 非線性中立穩定曲線  
( $X = 0, k = 0.05, R_0 = 0$ )

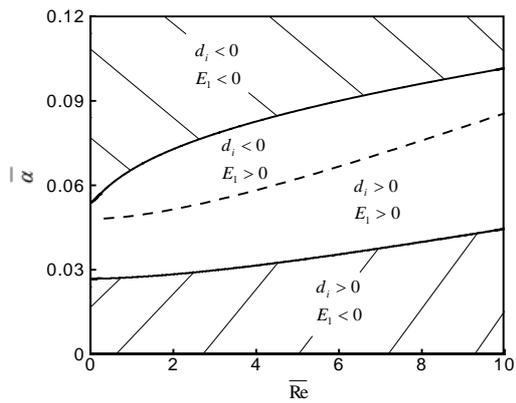


圖3(a) 非線性中立穩定曲線  
( $X = 0.12, k = 0.05, R_0 = 0$ )

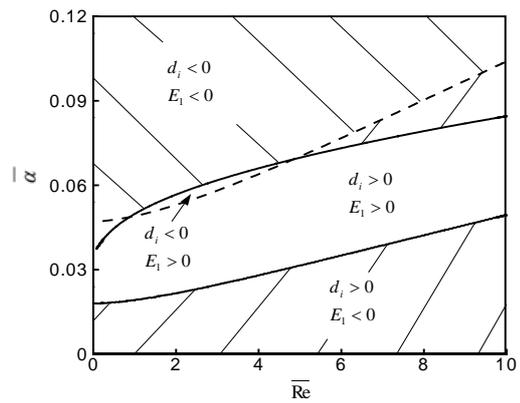


圖4(b) 非線性中立穩定曲線  
( $X = -0.09, k = 0.05, R_0 = 0.1$ )

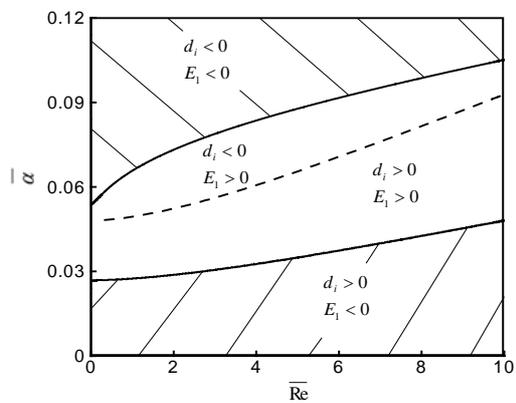


圖3(b) 非線性中立穩定曲線  
( $X = 0.12, k = 0.05, R_0 = 0.1$ )

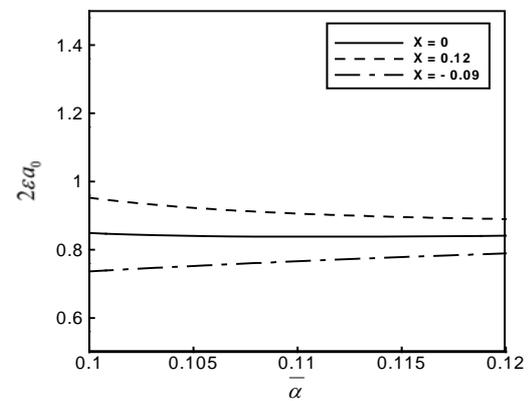


圖5 在不同  $X$  值條件下，亞臨界不穩定區中的臨界振幅值( $\overline{Re} = 5, k = 0.05, R_0 = 0$ )

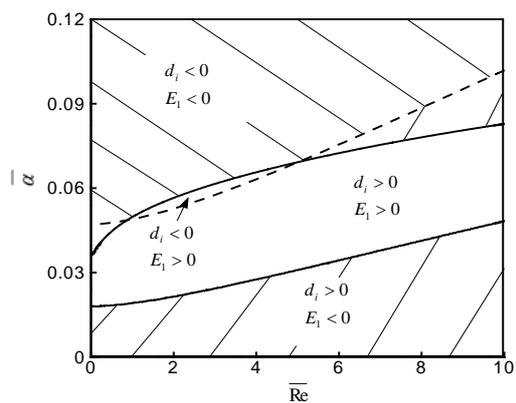


圖4(a) 非線性中立穩定曲線  
( $X = -0.09, k = 0.05, R_0 = 0$ )

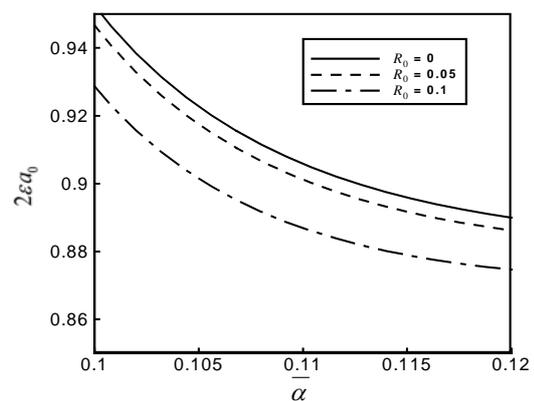


圖6 在不同  $R_0$  值條件下，亞臨界不穩定區中的臨界振幅值( $\overline{Re} = 5, k = 0.05, X = 0.12$ )

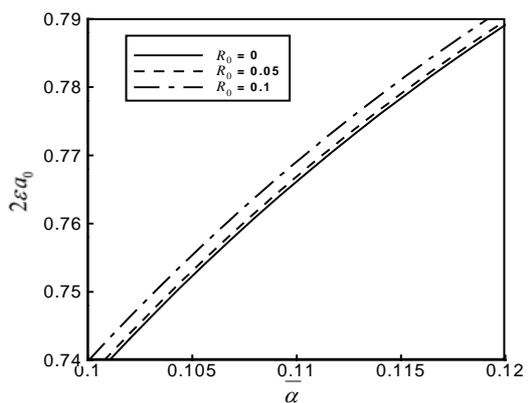


圖7 在不同  $R_0$  值條件下，亞臨界不穩定中的臨界振幅值 ( $\overline{Re}=5, k=0.05, X=-0.09$ )

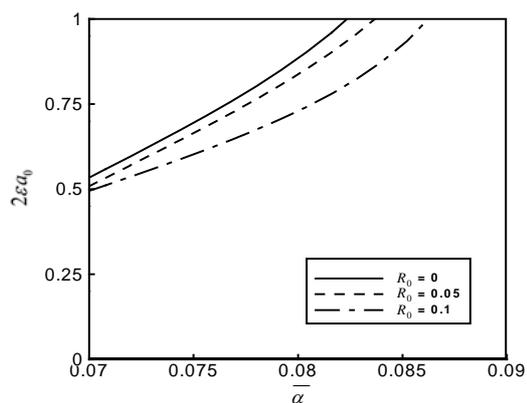


圖10 在不同  $R_0$  值條件下，超臨界穩定區的平衡振幅值 ( $\overline{Re}=10, k=0.05, X=-0.09$ )

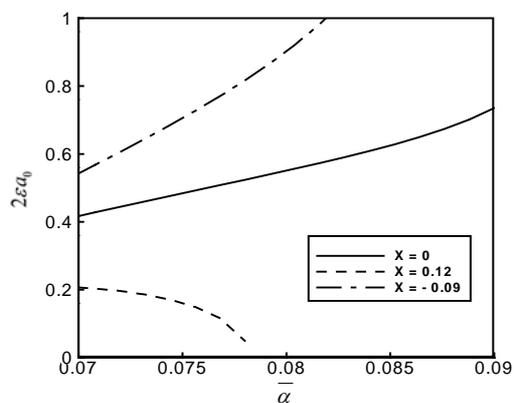


圖8 在不同  $X$  值條件下，超臨界穩定區中的平衡振幅值 ( $\overline{Re}=10, k=0.05, R_0=0$ )

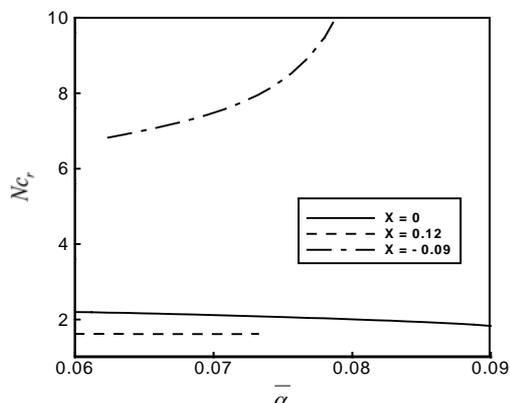


圖11 在不同  $X$  值條件下，超臨界穩定波之非線性波速 ( $\overline{Re}=10, k=0.05, R_0=0$ )

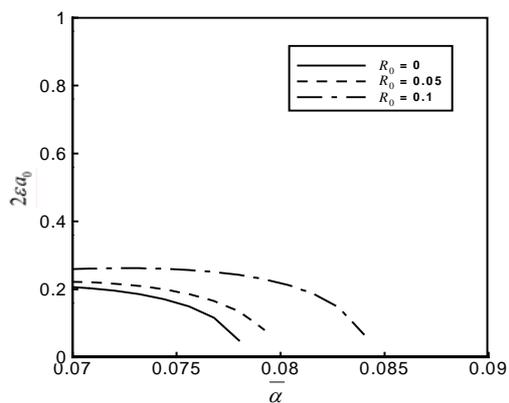


圖9 在不同  $R_0$  值條件下，超臨界穩定區中的平衡振幅值 ( $\overline{Re}=10, k=0.05, X=0.12$ )

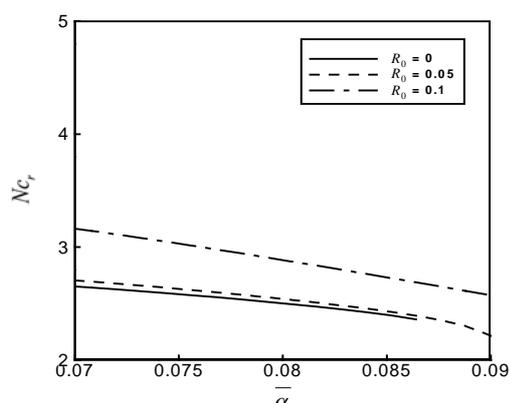


圖12 在不同  $R_0$  值條件下，超臨界穩定波之非線性波速 ( $\overline{Re}=10, k=0.05, X=0.12$ )

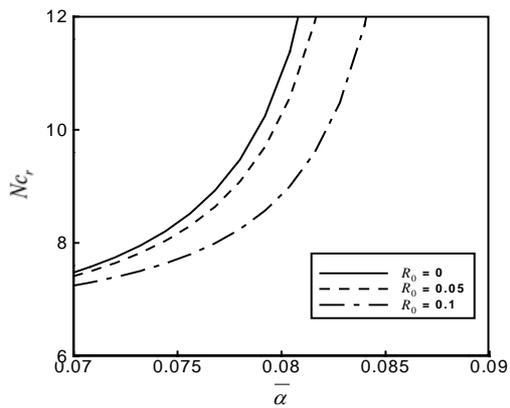


圖13 在不同  $R_0$  值條件下，超臨界穩定波之非線性波速 ( $\overline{Re}=10, k=0.05, X=-0.09$ )

## 六、計畫成果自評

本研究分析之結果已完成原計畫所預定之研究，發現沿直立圓柱表面流下之黏彈性流體薄膜流，圓柱在不同的運動型態包括旋轉或垂直方向移動時，系統之穩定性狀態。研究結果可作為薄膜流相關研究之參考，且適合在相關學術期刊發表。