

古典板理論與 Mindlin 板理論之 模態解比較研究

蔡國鈞 賴坤業

摘 要

模擬平板反應的理論甚多，由板厚度的不同所採用的理論隨之不同。在工程上，除了了解結構的基本差異外，有必要從歷時反應 (Time History Response) 作比較。然而因厚板理論所建立的模型，有較多的模態，常因作用力的歷時分佈與位置不同，形成不同的比較結果。因此本文除了比較結構的自然頻率外，擬採用 FFT(Fast Fourier Transform)來觀察與比較動態歷時反應，可得到直接量測上較佳的詮釋。

關鍵字： 板理論，結構頻率，模態解。

一、前言

有關矩形平板解析解的文獻很多[1,2,3,4,5,6,7]。一般較薄的平板，均採用古典板(Classical Plate Theory)[8]作分析，較厚的平板，則採用 Mindlin 板理論(Mindlin Plate Theory)[4]，而當板的厚寬比越大時，兩者的差異性也越大。

在工程上應用時，除了了解結構體的自然頻率基本差異外，經常採用歷時反應(Time History Response)作比較與分析。在平板問題中，因厚板理論所建立的模型，有較多的模態，且因作用力的歷時分佈與位置不同，形成不同的比較結果。因此本文除了比較結構的自然頻率外，擬採用 FFT(Fast Fourier Transform)[9]來觀察與比較動態歷時反應，可得到直接量測上，輔助的詮釋。

本文擬推導簡支承結構的古典板與 Mindlin 板理論點衝擊模態解，並將其結果，經由 FFT 作頻率域的比較討論。

二、問題描述

本文以線彈性且小變形之古典板理論與 Mindlin 板理論[4,10]為基礎，探討板厚薄在其結構自然頻率的差異，與受點作用力衝擊下的動態衝擊反應差異。所採用板幾何為矩形板，邊界條件為簡支承條件。計算方法採用模態解，又因一般平板撞擊實驗中，衝擊力之時間函數接近半正弦波型函數，因此本文分析的方式是以作用延時極短之半正弦波衝擊力作為衝擊力。

由於不同的板理論，隨著不同的板厚，動態衝擊反應會有差異，本文除了從歷時反應比較外，擬將透過 FFT(Fast Fourier Transform)，在頻率上作比較。

三、分析方法

以下分析方法將分成古典板理論與 Mindlin 板理論，考慮邊長分別為 a, b 厚度 h 之等向性矩形平板。

1. 古典板理論

根據古典板理論，其位移變形(u, v, w) 假設為[8]

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w = w(x, y, t) \quad (1)$$

其於(x_0, y_0) 受點力 $f(t)$ 的運動方程式則為

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \ddot{w} = f(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (2)$$

其中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ， E, ν, ρ 分別為楊氏係數、包生比與密度。

若邊界為簡支承(simple support) [8]為，

$$\begin{aligned} w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0, \quad w_{xx}(0, y, t) = w_{xx}(a, y, t) = 0 \\ w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0, \quad w_{yy}(x, 0, t) = w_{yy}(x, b, t) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

初值條件為

$$w(x, y, 0) = w_t(x, y, 0) = 0 \quad (4)$$

則位移場可設為

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (5)$$

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad (6)$$

其中 $T_{mn}(t)$ 為未定係數， $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b, d_{mn} = \frac{4 \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0}{ab}$

此級數解(5)式自動滿足簡支承邊界條件，方程式(2)式可改寫成

$$D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 T_{mn} + \rho h \ddot{T}_{mn} = f(t) d_{mn} \quad (7)$$

再利用 Laplace 轉換計算上式(7)可得

$$T_{mn} = \frac{d_{mn}}{\rho h \lambda_{mn}} \int_0^t \sin(\lambda_{mn} t) f(t-t) dt \quad (8)$$

其中 λ_{mn} 為結構的自然頻率

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \quad (9)$$

因此(8)式代入(5)式可得位移解：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{ab \rho h \lambda_{mn}} \int_0^t \sin \lambda_{mn} \tau f(t-\tau) d\tau \quad (10)$$

將位移解對時間作二次微分，可得加速度解：

$$\ddot{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{ab \rho h} (f(t) - \lambda_{mn} \int_0^t \sin \lambda_{mn} \tau f(t-\tau) d\tau) \quad (11)$$

本文考慮 $f(t)$ 為半正弦波的時間函數

$$f(t) = \begin{cases} \sin \Omega t & 0 \leq t \leq T_d \\ 0 & T_d \leq t \end{cases} \quad (12)$$

其中 T_d 為作用力延時(duration time)， $\Omega = \pi/T_d$ 。則加速度解為

$$\ddot{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{ab \rho h \lambda_{mn}} \begin{cases} \frac{\Omega (\lambda_{mn} \sin \lambda_{mn} t - \Omega \sin \Omega t)}{\lambda_{mn}^2 - \Omega^2} & 0 \leq t \leq T_d \\ \frac{\lambda_{mn} \Omega (\sin \lambda_{mn} t + \sin \lambda_{mn} (t - T_d))}{\lambda_{mn}^2 - \Omega^2} & t \geq T_d \end{cases} \quad (13)$$

2. Mindlin 板理論模態解

根據 Mindlin 理論，其位移變形 (u, v, w) 假設為[4, 11]

$$u = zu_1(x, y), \quad v = zv_1(x, y), \quad w = w_0(x, y) \quad (14)$$

其於 (x_0, y_0) 受點力 $f(t)$ 的運動方程式則為

$$\begin{cases} \delta w_0: & I_0 \ddot{w}_0 - N_{yx,y} - N_{xy,x} = f(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ \delta u_1: & I_2 \ddot{u}_1 + N_{xx} - M_{xx,x} - M_{xy,y} = 0 \\ \delta v_1: & I_2 \ddot{v}_1 + N_{yy} - M_{yy,y} - M_{xy,x} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{其中 } N_{xx} = \int_x \sigma_{xx} dz, N_{yy} = \int_x \sigma_{yy} dz, M_x = \int_x \sigma_x z dz, M_y = \int_x \sigma_y z dz, M_{xy} = \int_x \sigma_{xy} z dz,$$

σ_{ij} 為應力。若邊界為簡支承(simple support) [8]為，

$$\begin{aligned} w(0, y, t) &= w(a, y, t) = 0 \\ v(0, y, t) &= v(a, y, t) = 0 \\ M_x(0, y, t) &= M_x(a, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

與

$$\begin{aligned} w(x, 0, t) &= w(x, b, t) = 0 \\ u(x, 0, t) &= u(x, b, t) = 0 \\ M_y(x, 0, t) &= M_y(x, b, t) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

則位移場可設為

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{n=1} \sum_{m=1} U_{1mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ v_1 = \sum_{n=1} \sum_{m=1} V_{1mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ w_0 = \sum_{n=1} \sum_{m=1} W_{0mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{cases} \quad (18)$$

其中 $W_{0mn}, U_{1mn}, V_{1mn}$ 為未定係數， $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b$ 。此級數解自動滿足簡支承邊界條件。即可化簡得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{mn} + \mathbf{K}_{mn}\mathbf{u}_{mn} = \mathbf{f}_{mn} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{mn} = \begin{bmatrix} (\beta_n^2 \kappa H_{44} + \alpha_m^2 \kappa H_{55}) & \alpha_m \kappa H_{55} & \beta_n \kappa H_{44} \\ \alpha_m \kappa H_{55} & \kappa H_{55} + (\alpha_m^2 F_{11} + \beta_n^2 F_{66}) & \alpha_m \beta_n (F_{12} + F_{66}) \\ \beta_n \kappa H_{44} & \alpha_m \beta_n (F_{21} + F_{66}) & H_{44} + (\beta_n^2 F_{22} + \alpha_m^2 F_{66}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_{mn} = \begin{bmatrix} W_{0mn} \\ U_{1mn} \\ V_{1mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{mn} = \begin{bmatrix} f(t) d_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中剪力修正係數 $\kappa = 5/6$ [12]， $(I_0, I_2) = \int_V \rho(1, z^2) dz$ 、 $(H_{44}, H_{55}) = \int_V (E_{44}, E_{55}) dz$
 $(F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{66}) = \int_V (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{66}) z^2 dz$ ， ρ 為密度、 E_{ij} 為彈性
 係數矩陣 $\mathbf{E}_{6 \times 6}$ 的元素，(19)式的頻率方程為

$$|\mathbf{K}_{mn} - \lambda^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (23)$$

，由(19)式可解得加速度解[13]為：

$$\ddot{w} = \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^3 \frac{4}{\alpha b} V_{1n} \Gamma \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (24)$$

此時 \mathbf{V} 為 3×3 矩陣， λ_i, \mathbf{V}_i 為其第 i 個固有值與其列向量，

$$\Gamma = \begin{bmatrix} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}^{-1}]_{1,3} (-\lambda_1^2 J_1(t) + f(t)) \\ [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}^{-1}]_{2,3} (-\lambda_2^2 J_2(t) + f(t)) \\ [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}^{-1}]_{3,3} (-\lambda_3^2 J_3(t) + f(t)) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$J_i(t) = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^t \sin(\lambda_i \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (26)$$

$[]_{i,j}$ 表示矩陣 $[]$ 的 i 列 j 行個元素。此處考慮的時間函數 $f(t)$ 與(12)式相同，則

$$-\lambda_i^2 J_i(t) + f(t) = \begin{cases} \frac{\Omega(\lambda_i \sin \lambda_i t - \Omega \sin \Omega t)}{\lambda_i^2 - \Omega^2} & 0 \leq t \leq T_d \\ \frac{\lambda_i \Omega (\sin \lambda_i t + \sin \lambda_i (t - T_d))}{\lambda_i^2 - \Omega^2} & t \geq T_d \end{cases} \quad (27)$$

將之代入(25)、(24)式，即得受點衝擊力 $f(t)$ 的加速度反應 \ddot{w} 。

四、數值結果

本節根據前面的理論推導，在結構頻率方面，計算簡支承邊界的等向性板的結果作比較；在歷時反應方面，比較古典板與 Mindlin 剪力板的加速度反應。

4.1 結構頻率的比較

本節考慮等向性 6061 鋁板簡支承邊界條件的結構頻率，其材料係數 $E = 70\text{GPa}$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ [14]；表(一)及表(二)是由古典板理論(9)式與 Mindlin 板理論(23)式，所算得之自然頻率的比較。

表(一)是板尺寸為 $a = b = 10h$ 的無因次自然頻率，由於各種平板理論的模態個數有所不同[15]，且因古典板與 Mindlin 板理論的各種模態 (m, n) ，其頻率最小值為第一個反對稱模態，所以結果僅取第一個反對稱模態作比較[2]。比較的方式採用 $\omega h \sqrt{\rho/G}$ 無因次化(在文獻[2]裡印刷成 $\omega h / \sqrt{\rho/G}$ ，而在[10]裡為 $\omega h \sqrt{\rho/G}$)。在計算 Mindlin 板理論時，[2]並未提及剪力修正因子 κ 為何，經比對後發現：當 $\kappa = 5/6$ 時，Mindlin 板理論部份與[2]的結果一致。

表(二)為板尺寸 $a = b/\sqrt{2} = 10h$ 的無因次自然頻率，[2]與[10]均將古典板理論與 Mindlin 板理論的值放大 10 倍，由表(一)與表(二)的尺寸來看，顯然其值有誤，此處已將之修正除 10 倍。

綜合表(一)與表(二)等向性鋁板的結果，在厚寬比較大時，Mindlin 板理論的自然頻率比古典板理論的自然頻率小一些；當長寬厚 (a, b, h) 為 $a = b = 10h$ 時，第一個自然頻率約有 3.55% 的差異；當長寬厚 (a, b, h) 為 $b/\sqrt{2} = a = 10h$ 時，第一個自然頻率約有 2.56% 的差異，兩者在較高的頻率處皆差異更大。

4.2 板理論暫態反應之比較

本小節主要比較板尺寸 $a = b = 100h = 0.3\text{ m}$ 與 $a = b = 10h = 0.3\text{m}$ 兩種尺寸，在時間域與頻率域的加速度 \ddot{w} 反應比較，所採用的材料，與前 4.1 小節之

等向性 6061 鋁板相同。採用的板理論為古典板理論與 Mindlin 板理論。

圖(一)為板尺寸 $a = b = 100h = 0.3 \text{ m}$, 施力點在 $(0.05, 0.05)\text{m}$ 處, 作用力為一半正弦波型, 其振幅為 1Nt , 延時為 $T_d = 50 \times 10^{-5}$ 秒, 反應點在板中央 $(0.15, 0.15)\text{m}$ 處的加速度 \ddot{w} 反應, 每個採樣區間為 $\Delta t = 10^{-5}$ 秒, 共取 200 個樣本點, 累加的模態依採樣頻率的一半為上限, 很明顯寬厚比 (a/h) 為 100 時, 古典板理論(-)與 Mindlin 板理論(+)有相近的結果, 只是在歷時反應略有抖動的現象, 表示古典板與 Mindlin 板理論的結果在高頻反應有些差異。再觀察另一點 $(0.15, 0.20)\text{m}$ 處的反應: 圖(二)為在 $(0.15, 0.20)\text{m}$ 處的加速度 \ddot{w} 時域反應與頻率域反應, 此結果也是有相同的現象。其經由 FFT 轉換在頻率域的結果 (圖一右、圖二右), 大約從 10kHz 以下, 古典板與 Mindlin 板理論幾乎一致。

當板尺寸改為 $a = b = 10h = 0.3\text{m}$, 施力點位置、作用力波型、採樣區間、樣本點條件相同時的結果: 圖(三)為在板中央 $(0.15, 0.15)\text{m}$ 的加速度 \ddot{w} 時域反應與頻率域反應, 此時古典板理論(-)與 Mindlin 板理論(+)在時域反應略有差異。在頻率域反應中, 第一個振幅高峰反應是第 $(m,n) = (1,1)$ 模態的頻率, 可對照表(三)的古典板自然頻率為 1613Hz、表(四)的 Mindlin 板自然頻率 1558Hz。由於採樣區間為 200×10^{-5} 秒, 每點的頻率間格為 500Hz, 因此振幅高峰反應的頻率位置只能粗估。由於反應點在 $(0.15, 0.15)\text{m}$, 即板的正中央位置, 因此第 $(2,1), (1,2), (2,2)$ 模態並不會出現; 下一個振幅高峰反應為 $(3,1)$ 與 $(1,3)$ 模態的頻率, 古典板(-)與 Mindlin 板(+)則分別在 8067.8Hz 與 6951Hz。

再觀察另一點的反應: 圖(四)為在 $(0.15, 0.20)\text{m}$ 的加速度 \ddot{w} 歷時反應與頻率域反應。在這反應點位置上, 除了 $(1,1)$ 的模態, 還會出現 $(1,2)$ 模態(圖四右), 此時古典板(-)在 4033.9 Hz, Mindlin 板(+)則在 3718Hz。

綜合等向性鋁板的加速度反應: 厚寬比達 1/10 時, 古典板與 Mindlin 板理論的最小自然頻率相對差異約 3%, 即應以 Mindlin 板理論計算, 較為適宜。

五、結論

- (1) 本文所推出的古典板與 Mindlin 板理論之點衝擊的模態解結果，可作為其它數值方法的驗正。
- (2) 相同尺寸下，古典板理論的自然頻率比 Mindlin 板理論的自然頻率為大，因此對於較厚的平板應採用後者為宜。
- (3) 板衝擊的歷時反應，透過 FFT 在頻率域裡，可以輕易辨示出板理論的各模態，但仍受限於採樣頻率的限制，而僅能達到粗估的能力。

六、參考文獻：

- [1] J. N. Reddy "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates" Trans. ASME, J. Appl. Mech. (1984), 51,745-752.
 - [2] J. N. Reddy and N. D. Phan "Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory" J. of Sound and Vibration (1985) 98(2), 157-170.
 - [3] C. C. Chao, T. P. Tung, C. C. Sheu, J. H. Tseng "A Consistent Higher-Order Theory of Laminated Plates with Nonlinear Impact Modal Analysis" Trans. ASME, J. Vibra. and Acous. (1994) 116, 371-378.
 - [4] A. L. Dobyns "Analysis of Simply-Support Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Loads" AIAA J. (1981) vol 19, 5, pp642-650.
 - [5] J. Fan and J. Ye "An Exact solution for the Statics and Dynamics of Laminated Thick Plates with Orthotropic Layers " Int. J. Solids Structures, (1990), Vol. 26, pp.655-662.
 - [6] J. Fan and J. Ye "A Series Solution of the Exact Equation for the Exact Equation for Thick Orthotropic Plates " Int. J. Solids Structures, (1990), Vol. 26, pp.773-778.
 - [7] A. K. Noor and W.S. Burton "Three-Dimensional Solutions for
-

- Antisymmetrically Laminated Anisotropic Plates"Trans. ASME, J. of Appl. Mech. (1990) 57, 182-188.
- [8] E. B. Magrab "Vibration of Elastic structural members" (1979), chap 4.
- [9] E. O. Brigham "The Fast Fourier Transform" Englewood Cliffs, Prentice-Hall, (1974)
- [10] J. M. Reddy "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics with an Introduction to the Finite Element Method" A Wiley-Interscience publication (1984) pp382.
- [11] W. Soedel , "Vibrations of Shells and Plates" Marcel Dekker, Inc (1993) pp282.
- [12] J. M. Whitney and N. J. Pagano "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates" Trans. ASME, J. Appl. Mech. (1970) 92 1031-1036.
- [13] 賴坤業 "彈性平板的多重力源偵測"台灣大學應用力學研究所博士論文 (1999).
- [14] 顏慶世 "板彈性撞擊之正算與反算研究"台灣大學應用力學研究所博士論文(1992).
- [15] S. Srinivas and C.V. Joga Rao and A. K. Rao "An exact analysis for vibration of simply-supported Homogenous and Laminated Thick Rectangular Plates", J. of Sound and Vibration (1970) 12,187-199.
-

表(一) 鋁板 $a = b = 10h$ 時之無因次自然頻率 $\omega h \sqrt{\rho/G}$

m	n	古典板(A)	Mindlin板理論(B)	(A-B)/B (100%)
1	1	0.0963	0.0930	3.5484
2	1	0.2408	0.2219	8.5174
2	2	0.3853	0.3406	13.1239
3	1	0.4816	0.4149	16.0762
3	2	0.6261	0.5206	20.2651
4	1	0.8187	0.652	25.5675
3	3	0.8669	0.6834	26.8510
4	2	0.9632	0.7447	29.3407
4	3	1.204	0.8896	35.3417
5	1	1.2521	0.9174	36.4835
5	2	1.3966	0.9984	39.8838
4	4	1.5411	1.0764	43.1717
5	3	1.6374	1.1269	45.3013

 (二) 鋁板 $b/\sqrt{2} = a = 10h$ 時之無因次自然頻率 $\omega h \sqrt{\rho/G}$

M	n	古典板(C)	Mindlin板理論(D)	(C-D)/D (100%)
1	1	0.0722	0.0704	2.5568
1	2	0.1445	0.1373	5.2440
2	1	0.2167	0.2012	7.7038
1	3	0.2649	0.2424	9.2822
2	2	0.2890	0.2625	10.0952
2	3	0.4094	0.3595	13.8804
1	4	0.4334	0.3782	14.5955
3	1	0.4575	0.3967	15.3264
3	2	0.5298	0.4509	17.4983
2	4	0.5779	0.4861	18.8850
3	3	0.6501	0.5375	20.9488
1	5	0.6501	0.5375	20.9488
2	5	0.7946	0.6361	24.9175

表(三) 簡支承鋁古典板頻率(尺寸： $a = b = 10h = 0.3m$)

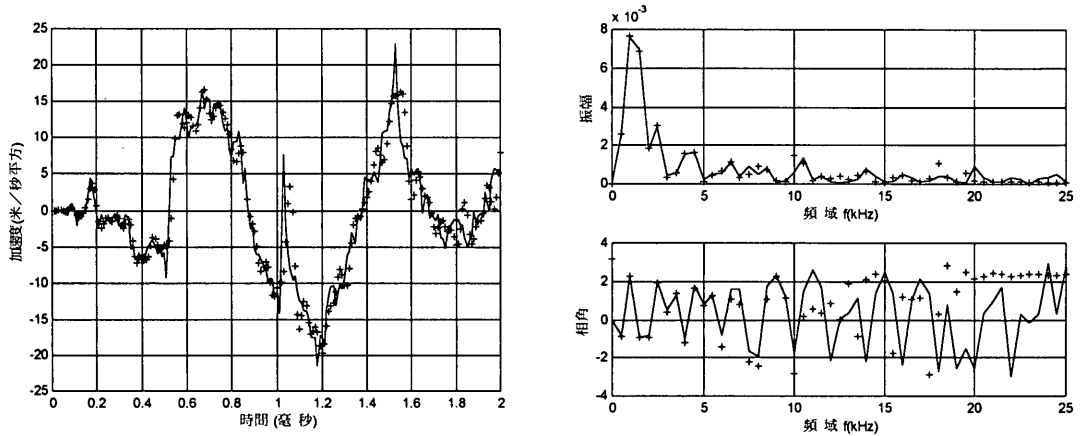
m	n	頻率(Hz)	m	n	頻率(Hz)
1	1	1613.6 (1)	2	4	16136 (13)
2	1	4033.9 (2)	4	3	20169 (14)
1	2	4033.9 (3)	3	4	20169 (15)
2	2	6454.2 (4)	5	1	20976 (16)
3	1	8067.8 (5)	1	5	20976 (17)
1	3	8067.8 (6)	5	2	23397 (18)
3	2	10488 (7)	2	5	23397 (19)
2	3	10488 (8)	4	4	25817 (20)
4	1	13715 (9)	5	3	27430 (21)
1	4	13715 (10)	3	5	27430 (22)
3	3	14522 (11)	6	1	29851 (23)
4	2	16136 (12)	1	6	29851 (24)

括弧(n)中的數字表示結構頻率的第 n 個數

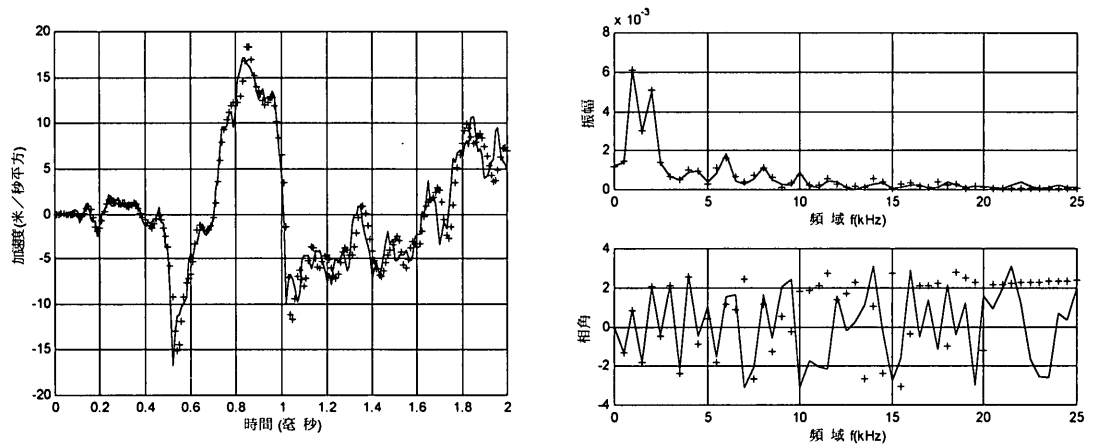
表(四) 簡支承鋁 Mindlin 板頻率(尺寸： $a = b = 10h = 0.3m$)

m	n	頻率 (Hz)	頻率 (Hz)	頻率 (Hz)	m	n	頻率 (Hz)	頻率 (Hz)	頻率 (Hz)
1	1	1558 (1)	53496 (99)	54850 (102)	3	5	18878 (21)	61223 (123)	76978 (196)
1	2	3718 (2)	54267 (100)	57478 (110)	5	3	18878 (22)	61223 (124)	76978 (196)
2	1	3718 (3)	54267 (101)	57478 (110)	6	1	20109 (23)	61898 (127)	78640 (204)
2	2	5705 (4)	55028 (103)	59931 (119)	1	6	20109 (23)	61898 (127)	78640 (204)
3	1	6951 (5)	55529 (104)	61485 (125)	6	2	21301 (25)	62565 (129)	80259 (217)
1	3	6951 (5)	55529 (104)	61485 (125)	2	6	21301 (25)	62565 (129)	80259 (217)
3	2	8721 (7)	56272 (106)	63713 (135)	5	4	21690 (27)	62786 (131)	80790 (219)
2	3	8721 (7)	56272 (106)	63713 (135)	4	5	21690 (27)	62786 (131)	80790 (219)
4	1	10923 (9)	57248 (108)	66520 (146)	6	3	23208 (29)	63662 (133)	82872 (225)
1	4	10923 (9)	57248 (108)	66520 (146)	3	6	23208 (29)	63662 (133)	82872 (226)
3	3	11449 (11)	57489 (112)	67196 (150)	7	1	25027 (31)	64741 (137)	85388 (227)
4	2	12475 (12)	57969 (114)	68522 (157)	5	5	25027 (31)	64741 (137)	85388 (227)
2	4	12475 (12)	57969 (113)	68522 (157)	1	7	25027 (31)	64741 (137)	85388 (227)
4	3	14904 (14)	59152 (115)	71693 (168)	6	4	25732 (34)	65167 (140)	86370 (230)
3	4	14904 (15)	59152 (115)	71693 (168)	4	6	25732 (34)	65167 (140)	86370 (230)
5	1	15369 (16)	59385 (117)	72305 (174)	2	7	26080 (36)	65380 (142)	86856 (232)
1	5	15369 (16)	59385 (117)	72305 (174)	7	2	26080 (37)	65380 (142)	86856 (232)
5	2	16726 (18)	60081 (120)	74102 (180)	7	3	27778 (38)	66430 (144)	89239 (234)
2	5	16726 (18)	60081 (120)	74102 (180)	3	7	27778 (39)	66430 (144)	89239 (234)
4	4	18033 (20)	60769 (122)	75844 (193)	6	5	28766 (40)	67053 (148)	90634 (236)

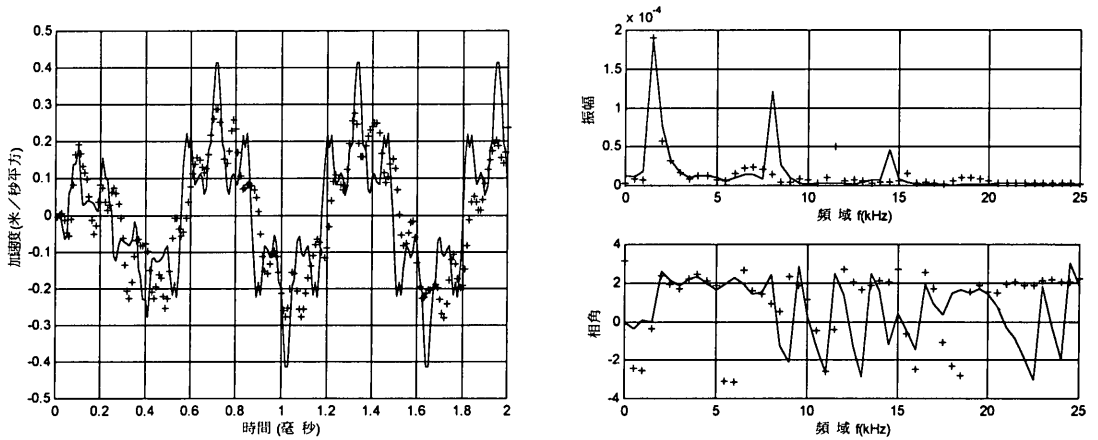
括弧(n)中的數字表示結構頻率的第 n 個數



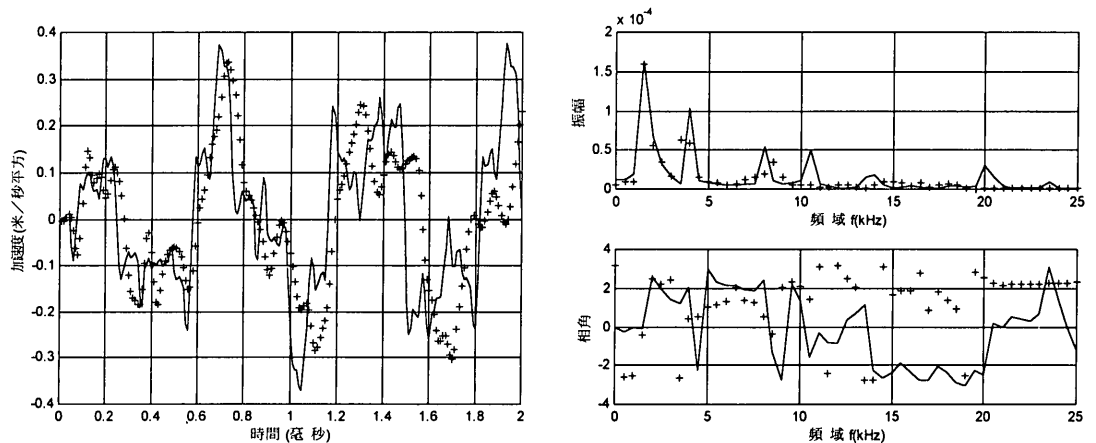
圖(一)6061 鋁板的加速度 \ddot{w} 反應(左圖)為時間域反應,(右圖)為頻率域反應
 板尺寸: $a = b = 100h = 0.3\text{m}$ 施力點(0.05,0.05)m, 反應點(0.15,0.15)m
 (-)古典板理論 (+)Mindlin 板理論



圖(二)6061 鋁板的加速度 \ddot{w} 反應(左圖)為時間域反應,(右圖)為頻率域反應
 板尺寸: $a = b = 100h = 0.3\text{m}$ 施力點(0.05,0.05)m, 反應點(0.15,0.20)m
 (-)古典板理論 (+)Mindlin 板理論



圖(三)6061 鋁板的加速度 \ddot{w} 反應 (左圖)為時間域反應,(右圖)為頻率域反應
 板尺寸: $a = b = 10h = 0.3\text{m}$ 施力點(0.05,0.05)m, 反應點(0.15,0.15)m
 (-)古典板理論 (+)Mindlin 板理論



圖(四)6061 鋁板的加速度 \ddot{w} 反應 (左圖)為時間域反應,(右圖)為頻率域反應
 板尺寸: $a = b = 10h = 0.3\text{m}$ 施力點(0.05,0.05)m, 反應點(0.15,0.20)m
 (-)古典板理論 (+)Mindlin 板理論

The Comparison and Study of The Classical Plate Theory and Mindlin Plate Theory

Gwo- Jiun Tsay and Kun- Yeh Lai

Abstract

There are many theories in simulating of plate response. According to the thickness of the plate, there are many different theories. In Engineering, beside the understanding the difference in structure, it is necessary to began the comparison from “Time History Response”. In thick plate, there are many modal solutions for many models , According to acting force’s history distribution and position, there are many different result. In this text, beside the structural natural frequency, we use FFT(Fast Fourier Transform) to observe and compare dynamic history response to obtain direct measurement’s result.

Key word: plate theory, structural frequency, modal solution.