

數位濾波器在結構工程上的應用

蔡國鈞 賴坤業

摘要

在工程上的理論模型計算值與實驗測量值之間，常因人為因素、理論模型與測量系統等等因素，造成兩者之間有誤差。而不同的理論模型，也因計算方法上的差異，造成計算結果的不同，因此本文擬嘗試用將數位濾波器應用在Mindlin正交異向性厚板理論，計算有限元素法與模態解，並比較有限元素法的Q8、Q9元素。在適當的濾波下，可得到一致的的結果。

關鍵字：數位濾波器，結構頻率，模態解。

The application of digital filter on structure engineering

Gwo-Jiun Tsay and Kun-Yeh Lai

Abstract

There are always somewhat differences between the calculation value of theoretic model value and the experimental value in engineering. These differences normally caused by human activity, various model and measuring system. In the theoretic model, there also exist some differences caused by various calculation's method. In this text, we calculate the Mindlin orthogonal anisotropic thick plate theory. We compare the finite element method with Q8, Q9 element to modal solution, and compare those results with digital filter. Under the proper filter, we can obtain the same conclusion.

Keywords: digital filter, structural frequency, modal solution

一、前言

工程計算方法中，有限元素法對於形狀不規則、載重與支承條件均複雜的結構，是十分有效的數值處理方法。有限元素法主要依變分原理或加權殘值法 (method of weighted residuals) [1] 作近似之計算方法。在有限元素法中，由於採用有限網格，而不能描述全部的振模；而且在進行迭代計算時，會有累積上的誤差，因此透過信號處理的方式，濾除彼此間的差異，以達到數值計算上的一致性是有必要的。

數位濾波器是對一個輸入數位訊號按一定程序進行運算，然後以數位形式輸出的系統。古典數位濾波器系統是獨立於輸入信號的長度，但濾波器的濾波設計範圍與其採樣頻率有關。因此採用古典數位濾波器可以不因信號的長度而改變，對使用者相當方便。古典數位濾波器有四種[2]：Butterworth 濾波器、Chebyshev 濾波器、逆Chebyshev 濾波器與Causer橢圓濾波器。本文將採用具有隨頻率單調下降的幅度特性的

Butterworth 濾波器。

本文擬採用有限元素法進行Mindlin厚板的動態計算，並與模態解的反應結果作比較。比較算例包括等向性鋁板與異向性預浸布板的Mindlin板理論、有限元素法的Q8元素與Q9元素、有限元素法與模態解等方面的動態反應結果比較。

二、問題描述

本文以線彈性之Mindlin板理論[1]，受點作用力的動態衝擊反應。計算方法採用有限元素法與模態解。在幾何邊界條件上，為了與模態解比較，而採用簡支承條件。又因一般平板撞擊實驗中，衝擊力之時間函數接近半正弦波型函數，因此本文分析的方式是以作用延時極短之半正弦波衝擊力作為衝擊力。在動態衝擊反應方面，則採用Newmark方法[3]直接積分。在數值計算上，由於有限元素法網格的有限與Newmark方法[3]的迭代計算，形成累積上的誤差，此處採用Butterworth 濾波器，作遞迴式計算濾波後的比較。

三、分析方法

1. 模態解

考慮邊長分別為 a, b 厚度 h 之正交異向性矩形平板，根據Mindlin理論，其位移變形 (u, v, w) 假設為[4,5]

$$\begin{aligned} u &= zu_1(x, y), \\ v &= zv_1(x, y), \\ w &= zw_0(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

其於 (x_0, y_0) 受點力 $f(t)$ 的運動方程式則為

$$\begin{cases} \delta v_0: I_0 \ddot{w}_0 - N_{yz,y} - N_{zx,x} = f(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ \delta u_1: I_2 \ddot{u}_1 + N_{xx} - M_{xx,x} - M_{xy,y} = 0 \\ \delta v_1: I_2 \ddot{v}_1 + N_{yy} - M_{yy,y} - M_{xy,x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} N_{xz} &= \int_z \sigma_{xz} dz, N_{yz} = \int_z \sigma_{yz} dz, \\ M_x &= \int_z \sigma_x z dz, M_y = \int_z \sigma_y z dz, M_{xy} = \int_z \sigma_{xy} z dz \end{aligned}$$

σ_{ij} 為應力。若邊界為簡支承 (simple support) [5] 為，

$$\begin{aligned} w(0, y, t) &= w(a, y, t) = 0 \\ v(0, y, t) &= v(a, y, t) = 0 \\ M_x(0, y, t) &= M_x(a, y, t) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

與

$$\begin{aligned} w(x, 0, t) &= w(x, b, t) = 0 \\ u(x, 0, t) &= u(x, b, t) = 0 \\ M_y(x, 0, t) &= M_y(x, b, t) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

則位移場可設為

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{n=1} \sum_{m=1} U_{1mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ v_1 = \sum_{n=1} \sum_{m=1} V_{1mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ w_0 = \sum_{n=1} \sum_{m=1} W_{0mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{cases} \tag{5}$$

其中 $W_{0mn}, U_{1mn}, V_{1mn}$ 為未定係數， $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b$ 。此級數解自動滿足簡支承邊界條件。即可化簡得

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{mn} + \mathbf{K}_{mn} \mathbf{u}_{mn} = \mathbf{f}_{mn} \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{K}_{mn} = \begin{bmatrix} (\beta_n^2 \kappa H_{44} + \alpha_m^2 \kappa H_{55}) & \alpha_m \kappa H_{55} & \beta_n \kappa H_{44} \\ \alpha_m \kappa H_{55} & \kappa H_{55} + (\alpha_m^2 F_{11} + \beta_n^2 F_{66}) & \alpha_m \beta_n (F_{12} + F_{66}) \\ \beta_n \kappa H_{44} & \alpha_m \beta_n (F_{12} + F_{66}) & H_{44} + (\beta_n^2 F_{22} + \alpha_m^2 F_{66}) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{u}_{mn} = \begin{bmatrix} W_{0mn} \\ U_{1mn} \\ V_{1mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{mn} = \begin{bmatrix} f(t) d_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$d_{mn} = \frac{4}{ab} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \tag{10}$$

其中剪力修正係數 $\kappa = 5/6$ [6]，

$$\begin{aligned} I_k &= \int_x \rho z^k dz, (H_{44}, H_{55}) = \int_x (E_{44}, E_{55}) dz, \\ (F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{66}) &= \int_x (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{66}) z^2 dz \end{aligned}$$

，由(6)式可解得加速度解[7]為：

$$\ddot{w} = \sum_{n=1} \sum_{m=1} \frac{4}{ab} v_n \Gamma \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \tag{11}$$

此時 \mathbf{V} 為 3×3 矩陣， λ_i, \mathbf{V}_i 分別為其第 i 個固有直與其列向量，

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} [\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}^{-1}]_{1,3}(-\lambda_1^2 J_1(t) + f(t)) \\ [\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}^{-1}]_{2,3}(-\lambda_2^2 J_2(t) + f(t)) \\ [\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}^{-1}]_{3,3}(-\lambda_3^2 J_3(t) + f(t)) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$J_i(t) = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^t \sin(\lambda_i \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (13)$$

$[]_{ij}$ 表示矩陣 $[]$ 的 i 列 j 行個元素。

本文考慮 $f(t)$ 為半正弦波的時間函數

$$f(t) = \begin{cases} \sin \Omega t & 0 \leq t \leq T_d \\ 0 & T_d \leq t \end{cases} \quad (14)$$

其中 T_d 為作用力延時(duration time)， $\Omega = \pi/T_d$ 。將 (14) 式代入 (13)

式，並對時間微分二次可得

$$\frac{d^2}{dt^2} J_i(t) = -\lambda_i^2 J_i(t) + f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_i \Omega (\sin \lambda_i (t - T_d) + \sin \lambda_i t)}{\lambda_i^2 - \Omega^2} & T_d \leq t \\ \frac{\Omega (\lambda_i \sin \lambda_i t - \Omega \sin \Omega t)}{\lambda_i^2 - \Omega^2} & 0 \leq t \leq T_d \end{cases} \quad (15)$$

將之代入 (12)、(11) 式，即得受點衝擊力 $f(t)$ 的加速度反應 \ddot{w} 。

2. 有限元素法

當板離散成多個元素，且各元素之各變數均採用相同的網格節點形狀函數時，可將其中第 e 個元素之各變數表示成：

$$(u^e, v^e, w^e) = (\mathbf{r}\mathbf{R}^{-1}\delta_u^e, \mathbf{r}\mathbf{R}^{-1}\delta_v^e, \mathbf{r}\mathbf{R}^{-1}\delta_w^e) \quad (16)$$

其中 $\mathbf{r}\mathbf{R}^{-1}$ 為形狀函數(shape function)，

δ_{ij}^e 為第 e 個元素的節點 ($\mathbf{U} = u_i, v_j, w_k$)

位移量， $\mathbf{r}(\varepsilon, \eta)$ 各項的選取只要求線性

獨立即可， ε, η 為局部座標系統，而一

般是採用多項式。當採用 Q8 (二次式八

節點) 或 Q9 (二次式九節點) 的時候 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varepsilon,$

與 \mathbf{R}^{-1} 分別如下

$$\mathbf{r}_{1 \times 8} = [1 \ \varepsilon \ \eta \ \varepsilon^2 \ \varepsilon\eta \ \eta^2 \ \varepsilon^2\eta \ \varepsilon\eta^2]$$

$$\mathbf{r}_{1 \times 9} = [1 \ \varepsilon \ \eta \ \varepsilon^2 \ \varepsilon\eta \ \eta^2 \ \varepsilon^2\eta \ \varepsilon\eta^2 \ \varepsilon^2\eta^2] \quad (17)$$

$$\mathbf{R}^{-1}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = -1, \eta = -1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = 0, \eta = -1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = 1, \eta = -1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = 1, \eta = 0) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = 1, \eta = 1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = 0, \eta = 1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = -1, \eta = 1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 8}(\varepsilon = -1, \eta = 0) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{R}^{-1}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = -1, \eta = -1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = 0, \eta = -1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = 1, \eta = -1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = 1, \eta = 0) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = 1, \eta = 1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = 0, \eta = 1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = -1, \eta = 1) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = -1, \eta = 0) \\ \mathbf{r}_{1 \times 9}(\varepsilon = 0, \eta = 0) \end{bmatrix}^{-1} \quad (18)$$

則總應變能為

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \varepsilon^e \sigma^e dz d\Omega^e$$

$$= \sum_e \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \delta^e \mathbf{r}^e \mathbf{S}^e \mathbf{r}^e \begin{bmatrix} h\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{h^3}{12}\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{S}^e \delta^e \begin{vmatrix} x_e & x_{, \eta} \\ y_e & y_{, \eta} \end{vmatrix} d\Omega^e \quad (19)$$

其中 \mathbf{E} 、 \mathbf{Q} 分別為 6×6 的彈性係數矩陣與零矩陣

$$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} \delta_{w_0}^e \\ \delta_{u_1}^e \\ \delta_{v_1}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{S}_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_y r_x R^{-1} + \eta_y r_r R^{-1} & 0 & rR^{-1} \\ \varepsilon_x r_x R^{-1} + \eta_x r_r R^{-1} & rR^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x r_x R^{-1} + \eta_x r_r R^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_y r_x R^{-1} + \eta_y r_r R^{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y r_x R^{-1} + \eta_y r_r R^{-1} \quad \varepsilon_x r_x R^{-1} + \eta_x r_r R^{-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $\mathbf{0}$ 為零列向量。而總動能為

$$T = \sum_{\frac{t}{2}}^1 \int_{h_n} \rho \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right) dz d\Omega_n$$

$$= \sum_{\frac{t}{2}}^1 \int_{h_n} \rho \sum_{\frac{t}{2}}^1 \int_{h_n} \begin{bmatrix} (rR^{-1})^T h r R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & l(rR^{-1})^T r R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & l(rR^{-1})^T r R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x & x_n \\ y_x & y_n \end{bmatrix} d\Omega_n \delta^t \quad (22)$$

因此，利用變分原理可得到

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{f} \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{M} = \sum_{\frac{t}{2}}^1 \int_{h_n} \mathbf{S}^{eT} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{S}^e \begin{bmatrix} x_x & x_n \\ y_x & y_n \end{bmatrix} d\Omega_n \delta^t \quad (24)$$

$$\mathbf{K} = \rho \sum_{\frac{t}{2}}^1 \int_{h_n} \begin{bmatrix} (rR^{-1})^T h r R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & l(rR^{-1})^T r R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & l(rR^{-1})^T r R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x & x_n \\ y_x & y_n \end{bmatrix} d\Omega_n \quad (25)$$

(23)式可利用Newmark方法[3]直接積分。

3. Butterworth 濾波器

一般衝擊力，其分佈的頻率相對於採樣頻率而言，在低頻率區有較高的權重，因此Butterworth低通數位濾波器是適合採用。Butterworth濾波器的極點個數，與濾波結果的理想要求，有很大的關係，當極點個數越多時，整個頻率響應接近在高頻處無遺漏濾波的要求。但是相對地，在進行濾波的遞迴計算時，會增加其計算量。

一般取 N 個極點的Butterworth濾波器稱為 N 階Butterworth濾波器。極點個數的決定，可依頻率響應的幅度來設計

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (26)$$

在通帶區間 $\omega = \omega_p$ 以下的頻率響應，要求在 R_p dB 以下，在阻帶區間 $\omega = \omega_s$ 以上的頻率響應，要求在 R_s dB 以上，來選取適當的 $n=N$ 與截止頻率 ω_c [6]。但本文之結構衝擊反應是與結構的自然頻率有關，當訊號取在衝擊反應後是穩態反應，屬於離散的頻譜反應，而含蓋衝擊反應區間的頻譜反應，則因衝擊力權

重集中於低頻區，因此不需要取很高階的濾波器作設計，而且若N值取很大時對於濾波計算相對更費時，所以本文採用的階數為N=5。求取N階Butterworth數位濾波器的遞迴式：

$$y_n = b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \dots + b_{N+1} x_{n-N} - a_2 y_{n-1} - \dots - a_{N+1} y_{n-N} \quad (27)$$

其中 x 為原信號， y 為濾波後的信號，遞迴式的係數 $a = [1 \ a_2 \ \dots \ a_{N+1}]$ 、 $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{N+1}]$ ，可依下列步驟執行[2]：

第一步：為了避免產生混疊現象，利用 $\Omega_c = 2f_s \tan(\pi\omega_c / f_s)$ 作預先扭曲 (pre-warped) 轉換，其中 ω_c 為濾波之頻率； $f_s = 1/\Delta t$ 為採樣頻率，滿足 $\omega_c < 2f_s$

第二步：取得N階Butterworth濾波器的轉換函數，其中N個極點皆落在單位圓上之左半邊，且沒有零點

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}, \quad p_k = e^{i\pi\left(\frac{2k-1}{2N} + \frac{1}{2}\right)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (28)$$

第三步：將轉換函數轉換到所需要的低通區間

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N \left(\frac{s}{\Omega_c} - p_k\right)} \quad (29)$$

第四步：再利用雙線性化成等價的Z變換形式之轉換函數，求取係數 \mathbf{a}, \mathbf{b} 。

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=2f_s \frac{z-1}{z+1}} = \frac{b_1 + b_2 Z^{-1} + \dots + b_{N+1} Z^{-N}}{1 + a_2 Z^{-1} + \dots + a_{N+1} Z^{-N}} \quad (30)$$

四、數值結果

本節主要是以簡支承邊界條件之等向性與異向性問題為算例，比較有限元素法與模態解的加速度結果。所選用的材料為等向性6061鋁板[9]，異向性材料為Fiberite公司生產1076E T300/976預浸布板[10]，板理論採用Mindlin板，尺寸： $a=h=10h=0.3\text{m}$ 、施力點(0.075,0.225)m，反應點(0.150,0.075)m, (0.200,0.075)m，施力點所採用的作用力，為作用延時 $T_d=40 \times 10^{-5}$ 秒且振幅大小為1Nt的半正弦波型力，濾波方式採用Butterworth數位濾波器，濾波範圍：從0到15kHz，採樣時步為 $\Delta t=0.5 \times 10^{-5}$ 秒，採樣點為240

點，比較方式包括：Q8、Q9有限元素與模態解之加速度歷低通濾波後反應，其中有限元素法是取12x12大小相同的網格。

圖(4.1、4.2)是鋁板施力點(0.075,0.225)m，反應點分別為(0.150,0.075)m與(0.200,0.075)m的加速度低通濾波前(圖左)後(圖右)的歷時反應圖，其中實線(-)為模態解、(o)與(+)分別為有限元素法Q8與Q9元素的解。明顯地，Q8元素解(o)、Q9元素解(+)與模態解(-)加速度低通濾波15kHz後是一致的。因此對於Mindlin板理論，有限元素法的元素Q8是足夠的。

一般在計算時，對濾波範圍的考慮，是需要依據考慮網格的大小，是否足夠所需的結構頻率，以及採樣頻率是否足夠含蓋所需的頻率。

再從異向性預浸布板來看，圖(4.3、4.4)是預浸布板施力點(0.075,0.225)m，反應點分別為(0.150,0.075)m與(0.200,0.075)m的加速度低通濾波前(圖左)後(圖右)的歷時反

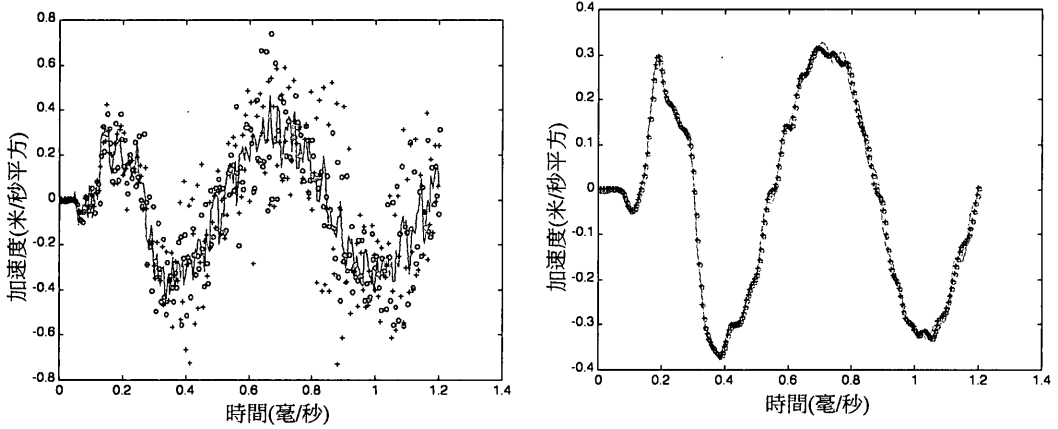
應圖，其中實線(-)為模態解、(o)與(+)分別為有限元素法Q8元素解與Q9元素解。明顯地，對預浸布板而言，經濾波後處理，Q8元素解(o)、Q9元素解(+)與模態解(-)的加速度反應也是一致的。

五、結論

- (1)本文推導之Mindlin板有限元素法，經Newmark動態反應計算方法，求取加速度反應，並經由數位濾波器濾波後，其結果與簡支承模態解經數位濾波器濾波後，可得到一致的結果。
- (2)在有限元素法元素的比較上，Q8元素的自由度雖較Q9元素少，選擇Q8元素對計算的正確性是足夠的。

參考文獻：

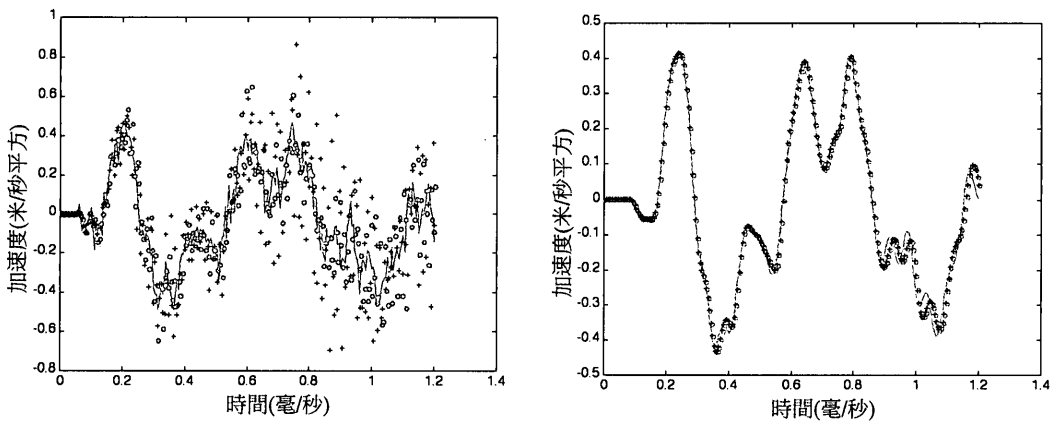
- [1] J. M. Reddy "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics with an Introduction to the Finite Element Method" A Wiley-Interscience publication (1984) pp382.
- [2] T. W. Parks and C. S. Burrus, "Digital Filter Design", John Wiley & Sons, (1987), chapter 7.
- [3] K.J. Bathe and E. L. Wilson "Numerical Methods in Finite Elements Analysis" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1976) chapter 8.
- [4] E. B. Magrab "Vibration of Elastic structural members" (1979).
- [5] W. Soedel, "Vibrations of Shells and Plates" Marcel Dekker, Inc (1993) pp282.
- [6] J.M. Whitney and N. J. Pagano "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates" Trans. ASME, J. Appl. Mech. (1970) 92 1031-1036.
- [7] 賴坤業 "板彈平板之多重力源偵測" 台灣大學應用力學研究所博士論文 (1999).
- [8] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer "Discrete-Time Signal Processing" London , Prentice Hall International, (1989) chapter 7.
- [9] 顏慶世 "板彈性撞擊之正算與反算研究"台灣大學應用力學研究所博士論文(1992).
- [10] E. Wu, J. C. Yeh and C. S. Yen "Identification of Impact Forces at Multiple Locations on Laminated Plates" AIAA Journal (1994) 32(12), 2433-2439.



圖(4.1ab) Mindlin板理論鋁板加速度濾波前(左)後(右)歷時圖

施力點(0.075,0.225)m反應點(0.150,0.075)m

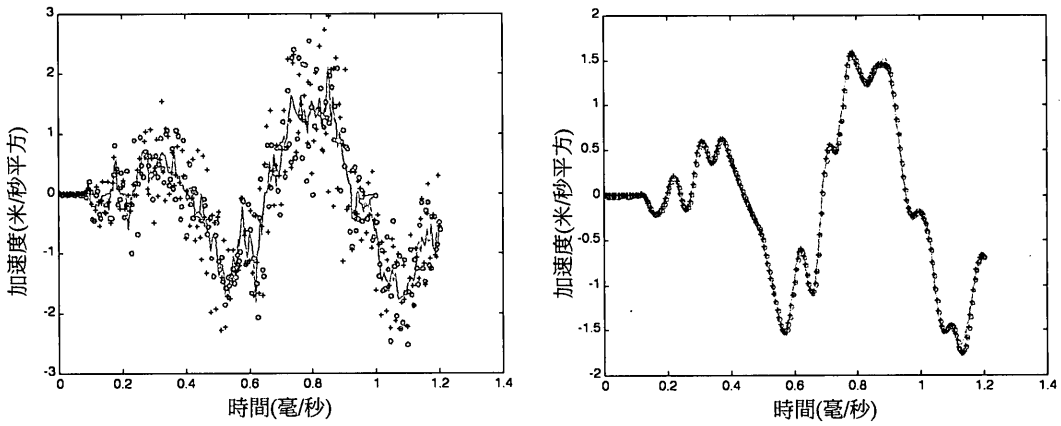
(-) 模態解 (o) 有限元素法Q8 (+) 有限元素法Q9



圖(4.2ab) Mindlin板理論鋁板加速度濾波前(左)後(右)歷時圖

施力點(0.075,0.225)m反應點(0.200,0.075)m

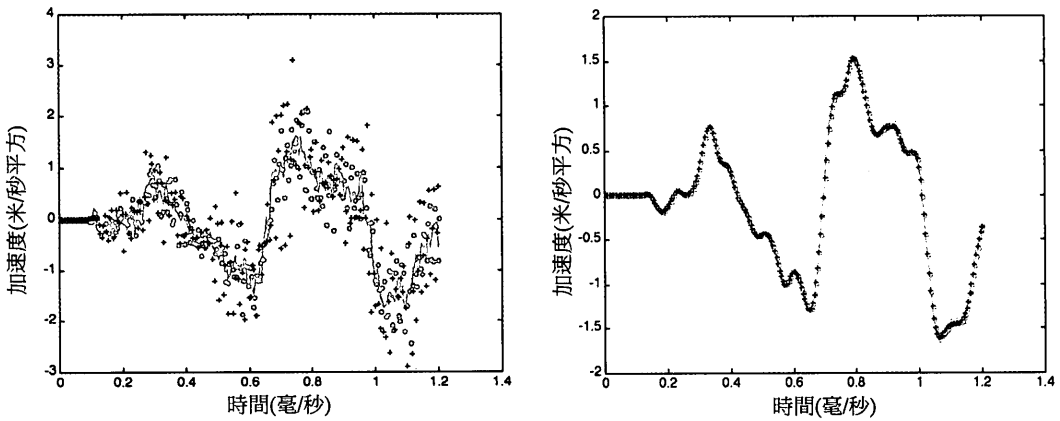
(-) 模態解 (o) 有限元素法Q8 (+) 有限元素法Q9



圖(4.3ab) Mindlin板理論預浸布板加速度濾波前(左)後(右)歷時圖

施力點(0.075,0.225)m反應點(0.150,0.075)m

(-)模態解 (o)有限元素法Q8 (+)有限元素法Q9



(4.4ab) Mindlin板理論預浸布板加速度濾波前(左)後(右)歷時圖

施力點(0.075,0.225)m反應點(0.200,0.075)m

(-)模態解 (o)有限元素法Q8 (+)有限元素法Q9